TRAITE ELEMENTAIRE D'ALGEBRE JOSEPH BERTRAND

Joseph Bertrand

5 F 1

NAZIONALE
B. Prov.
I
563
NAPOLI
R. BIBLIOTECA
VITT. EM. III

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

TRAITÉ

ÉLÉMENTAIRE

D'ALGÈBRE

Digitized by Google

OUVRAGE DU MÊME AUTEUR

PUBLIÉ PAR LA MÊME LIBRAIRIE.

TRAITÉ D'ARITHMÉTIQUE, avec un grand nombre d'exercices. Ouvrage autorisé par le conseil de l'Université. 1 volume in-8°, broché. 4 fr.

Solutions raisonnées des exercices proposés dans l'Arithmétique de M. J. Bertrand; par MM. GROS et PROUHET, professeurs de mathématiques. 1 volume in-8°, broché. 1 fr. 50 c.

DE L'IMPRIMERIE DE CRAPELET, RUE DE VAUGIRARD, 9.

Digitized by Google

606729 SBN

TRAITÉ

ÉLÉMENTAIRE

D'ALGÈBRE

PAR

JOSEPH BERTRAND

MAÎTRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

OUVRAGE

COMPLÉTÉ D'APRÈS LE DERNIER PROGRAMME OFFICIEL D'ADMISSION
A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

PARIS

LIBRAIRIE DE L. HACHETTE ET Cie

RUE PIERRE-SARRAZIN, No 14

(Quartier de l'École de Médecine)

1851

Digitized by Google

Digitized by Google

TRAITÉ

ÉLÉMENTAIRE

D'ALGÈBRE.

EXPLICATION DES SIGNES ALGÉBRIQUES.

Les signes abréviatifs usités en algèbre sont, pour la plupart, employés en arithmétique, et connus par conséquent du lecteur; nous croyons cependant utile de les indiquer ici.

$+$ est le signe de l'addition; il se prononce *plus*; $a+b$ indique la somme des deux nombres désignés par a et b.

$-$ est le signe de la soustraction; il se prononce *moins*; $a-b$ indique la différence des deux nombres désignés par a et b.

$\times$ est le signe de la multiplication; il se prononce *multiplié par*; $a\times b$ indique le produit des deux nombres désignés par a et b. On supprime souvent ce signe, et l'on se borne à indiquer la multiplication en écrivant les facteurs auprès l'un de l'autre, ab au lieu de $a\times b$, $(a+b)(c+d)$ au lieu de $(a+b)\times(c+d)$. Cette simplification ne peut être adoptée pour les facteurs numériques, car elle conduirait, par exemple, à représenter, de la même manière, le nombre 54 et le produit 5×4.

: signifie *divisé par*; $a:b$ indique le quotient de la division des nombres désignés par a et b. On indique aussi les divisions en écrivant le dividende au-dessus du diviseur, et les séparant par une barre horizontale; $\frac{a}{b}$ indique le quotient de la division de a par b.

Digitized by Google

$\sqrt{\ }$ indique la racine carrée; $\sqrt{a}$ indique la racine carrée du nombre désigné par a.

$\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$ ... $\sqrt[m]{\ }$ indiquent les racines cubique, quatrième..., m^{me}. En désignant par m un nombre entier quelconque, $\sqrt[m]{a}$ indique la racine m^{me} de a, c'est-à-dire le nombre qui multiplié $m-1$ fois par lui-même reproduit a.

$=$ exprime l'égalité des expressions placées à droite et à gauche de ce signe; $a=b$ exprime l'égalité des deux nombres représentés par a et b.

$>$ s'énonce *plus grand que*; $a>b$ exprime que le nombre désigné par a est plus grand que le nombre désigné par b.

$<$ s'énonce *plus petit que*; $a<b$ exprime que le nombre désigné par a est plus petit que le nombre désigné par b.

Lorsqu'on place une expression entre deux parenthèses, il faut regarder, comme effectuées, les opérations qui y sont indiquées, et la parenthèse comme exprimant le nombre qui en résulte. Ainsi

$$c-(a-b-c)$$

indique l'excès de c sur le nombre $a-b-c$.

Digitized by Google

CHAPITRE PREMIER.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES; ADDITION ET SOUSTRACTION ALGÉBRIQUES.

Définition de l'algèbre.

1. En algèbre, on étudie les opérations indépendamment des nombres sur lesquels elles s'exécutent : c'est là le caractère distinctif de cette science. La ligne de démarcation entre l'algèbre et l'arithmétique est, du reste, en quelque sorte insaisissable : les résultats particuliers ne peuvent en effet se séparer complétement des théories générales, et les questions d'arithmétique conduisent, d'une manière presque inévitable, à des propositions d'algèbre.

Formules algébriques.

2. Les nombres sur lesquels on raisonne en algèbre devant rester indéterminés, on les désigne, en général, par des lettres. On ne peut alors effectuer les opérations et il faut se borner à les indiquer. Cette indication d'opérations à effectuer sur des lettres dont la valeur n'est pas encore fixée, se nomme une *formule algébrique*.

Exemples. $$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$S = \frac{(a+l)n}{2},$$

sont des formules indiquant les opérations à effectuer pour former le carré d'une somme $a+b$, et pour sommer une progression arithmétique de n termes qui commence par a et qui finit par l.

3. L'avantage qu'il y a à renfermer ainsi, dans une formule générale, un nombre infini de résultats particuliers, est une

Digitized by Google

chose évidente de soi, il ne sera pas inutile, cependant, de le faire ressortir par quelques exemples.

1° L'énoncé des théorèmes généraux se trouve considérablement abrégé, et, par là, plus facile à retenir.

Ainsi, au lieu de dire :

La somme de deux nombres est la même dans quelque ordre qu'on les ajoute;

Le produit de deux facteurs ne change pas quand on les intervertit;

Pour multiplier deux puissances d'un même nombre, il suffit d'ajouter les exposants;

On écrira

$$a+b=b+a$$
$$ab=ba$$
$$a^m \times a^n = a^{m+n},$$

et pour quiconque connaît la langue algébrique, les théorèmes sont tout aussi bien énoncés par ces formules, que par les trois phrases écrites plus haut.

2° L'emploi des formules abrège non-seulement l'énoncé des théorèmes, mais encore simplifie leur démonstration. Pour en donner un exemple, je choisirai la question suivante :

Un mobile se meut d'un mouvement uniforme; sa vitesse, c'est-à-dire l'espace qu'il parcourt dans l'unité de temps, est v : quel sera l'espace x parcouru dans un temps t? Le caractère du mouvement uniforme étant que les espaces parcourus soient proportionnels aux temps, on a

$$x : v :: t : 1,$$

d'où l'on conclut

[1] $$x=vt,$$

c'est là la formule demandée.

On en déduit évidemment les deux suivantes :

[2] $$v=\frac{x}{t},$$

[3] $$t=\frac{x}{v}.$$

La formule [1] rend évidents les théorèmes suivants :

Dans un mouvement uniforme, l'espace parcouru pendant

Digitized by Google

un temps donné, est proportionnel à la vitesse; pour une vitesse donnée, il est proportionnel au temps, et en général, il est égal au produit du temps par la vitesse.

De la formule [2] on déduit les théorèmes suivants:

Dans un mouvement uniforme, la vitesse est proportionnelle à l'espace parcouru pendant un temps donné, elle est en raison inverse du temps employé à parcourir un espace donné, et en général, elle est égale au rapport de l'espace au temps employé à le parcourir.

Enfin on conclut de la formule [3] :

Le temps employé à parcourir un espace donné est inversement proportionnel à la vitesse; lorsque la vitesse est donnée, le temps est proportionnel à l'espace à parcourir, et en général, le temps est égal au rapport de l'espace parcouru à la vitesse du mobile.

Chacun de ces théorèmes exigerait une démonstration spéciale plus ou moins développée, si on les abordait directement *; les formules [1], [2], [3], les rendent évidents pour tous ceux qui connaissent la valeur des locutions, proportionnelles et inversement proportionnelles. (Voir l'*Arithmétique*).

Je citerai encore un exemple. On démontre en géométrie les théorèmes suivants :

1° Deux circonférences sont entre elles comme leurs rayons, ou en d'autres termes, il existe entre une circonférence C et son rayon R un rapport constant 2π; on a par conséquent la formule

$$C = 2\pi R;$$

2° Deux cercles sont entre eux comme les carrés de leurs rayons;

3° Un cercle a, pour mesure, le produit de sa circonférence par la moitié de son rayon; en d'autres termes, sa surface S est mesurée par le produit $C \times \frac{R}{2}$, et l'on a

$$S = C \times \frac{R}{2} = 2\pi R \times \frac{R}{2} = \pi R^2;$$

* Galilée, qui ne faisait pas usage de formules, y a consacré quatre pages, *Giornata terza, de motu Æquabili.*

Digitized by Google

or, cette dernière formule rend évident le second des théorèmes énoncés, « la surface d'un cercle est proportionnelle au carré de son rayon. » On pourrait donc se dispenser d'en faire un théorème distinct des deux autres, et, surtout, on ne doit pas en donner une démonstration directe.

Si l'on se bornait à énoncer les théorèmes sans en réduire les conséquences en formules, cette dépendance des propositions pourrait rester inaperçue.

Classification des formules.

4. Les expressions algébriques peuvent comprendre l'indication des six opérations : addition, soustraction, multiplication, division, élévation aux puissances, extraction des racines.

Une expression est *rationnelle* lorsqu'aucune extraction de racine n'y est indiquée. Dans le cas contraire, elle est *irrationnelle*.

Une expression rationnelle, qui ne contient l'indication d'aucune division, est dite *entière*. Dans le cas contraire, elle est *fractionnaire*.

Une expression, qui ne contient l'indication d'aucune addition ou soustraction, se nomme *monome*.

Si l'un des facteurs d'un monome est numérique, il reçoit le nom de *coefficient*.

Plusieurs monomes ajoutés ou retranchés forment un polynome, dont ils sont les termes. Deux termes d'un même polynome sont dits *semblables*, lorsqu'ils ne diffèrent que par le coefficient. Dans ce cas, on peut toujours les réduire à un seul. Par exemple, si l'on avait, dans un même polynome, les deux termes $+7a^3b$, $-5a^3b$, on pourrait évidemment les remplacer par $2a^3b$.

Un polynome composé de deux ou trois termes reçoit le nom de *binome* ou de *trinome*.

Exemples. $\sqrt[3]{a^2+b^3}-\sqrt{a+b+c}$, expression irrationnelle,

$\frac{a^3-b}{a^2+b^3+c^2}$, expression rationnelle fractionnaire;

$(a^3+b^3-c^3)(a^2+b^2)$, expression entière et rationnelle;

$15a^3b^4\sqrt{c}$, monome dont 15 est le coefficient;

$a^3+2a-b\sqrt{c}$, polynome.

Digitized by

Addition et soustraction des polynomes.

5. Les opérations algébriques se faisant sur des quantités littérales, il est impossible de les exécuter jusqu'au bout, et l'on doit se borner à les indiquer. Aussi le calcul algébrique consiste-t-il, seulement, à transformer une formule en une autre plus simple, mais équivalente.

Exemple. Quand on substitue a^5 au produit $a^2 \times a^3$, ou $a+b$ à l'expression $\sqrt{a^2+2ab+b^2}$. On fait une opération algébrique, et l'on dit quelquefois, que l'on *effectue* ainsi le produit de a^2 par a^3, ou l'extraction de la racine carrée de $a^2+2ab+b^2$.

L'addition et la soustraction étant les plus simples des opérations, on conçoit qu'il n'y a pas lieu de les simplifier; aussi nous bornerons-nous à faire quelques remarques très-simples sur l'addition et la soustraction des polynomes.

1° Une somme reste la même dans quelque ordre que l'on ajoute ses parties.

2° Un polynome ne change pas de valeur, quel que soit l'ordre dans lequel on écrive ses termes. Il est égal en effet, dans tous les cas, à l'excès de la somme de ceux qui sont précédés du signe $+$ sur la somme de ceux qui sont précédés du signe $-$.

3° Pour ajouter, à un nombre, la somme de plusieurs autres, il suffit de lui ajouter successivement chacun d'eux.

4° Pour ajouter, à un nombre, la différence de deux autres, il suffit d'ajouter le premier et de retrancher le second du résultat.

5° Pour retrancher d'un nombre la somme de plusieurs autres, il suffit de retrancher successivement chacun d'eux.

6° Pour retrancher d'un nombre la différence de deux autres, il faut ajouter le second et retrancher le premier du résultat.

En effet, une différence ne change pas lorsqu'on ajoute un même nombre à ses deux termes. L'excès de a sur $b-c$ est donc le même que celui de $a+c$ sur b.

Ces principes s'expriment par les formules suivantes :

[1] $$a+b+c+d=d+c+b+a;$$

[2] $$a-b+c-d=c+a-b-d;$$

[3] $a+(b+c+d)=a+b+c+d;$

[4] $a+(b-c)=a+b-c;$

[5] $a-(b+c)=a-b-c;$

[6] $a-(b-c)=a+c-b.$

6. Les principes que nous venons d'énoncer conduisent aux règles suivantes :

Règle d'addition.

Pour ajouter à un nombre, un polynome quelconque, il faut lui ajouter les termes précédés du signe $+$ et retrancher les autres du résultat.

Soit, en effet, à ajouter à P, le polynome

$$a-b+c-d-e+f,$$

ce polynome (5, 2°) est égal à

$$(a+c+f)-(b+d+e);$$

or on a (5, 4°)

$$\begin{aligned} P+\{(a+c+f)-(b+d+e)\} &= P+(a+c+f)-(b+d+e), \\ &= P+a+c+f-b-d-e: \end{aligned}$$

c'est précisément ce qu'il fallait démontrer.

Règle de soustraction.

Pour retrancher d'un nombre, un polynome quelconque, il faut ajouter à ce nombre, les termes qui, dans le polynome, sont précédés du signe —, et retrancher les autres du résultat.

Soit en effet, à retrancher de P, le polynome

$$a-b+c-d-e+f,$$

ce polynome (5, 2°) est égal à

$$a+c+f-(b+d+e);$$

or on a (5, 6°)

$$\begin{aligned} P-\{(a+c+f)-(b+d+e)\} &= P+(b+d+e)-(a+c+f) \\ &= P+b+d+e-a-c-f: \end{aligned}$$

c'est précisément ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. L'ordre dans lequel on écrit les termes d'un polynome étant indifférent, on peut énoncer les règles précédentes en disant :

Pour ajouter à un nombre P, un polynome quelconque, il faut écrire ses différents termes à la suite de P, en leur conservant leurs signes.

Pour retrancher d'un nombre P un polynome quelconque, il faut écrire ses différents termes à la suite de P en changeant le signe de chacun d'eux.

Énoncé plus simple des résultats précédents.

7. La forme des résultats précédents peut se simplifier à l'aide d'une convention très-utile en algèbre, qui consiste à regarder tous les termes d'un polynome comme *ajoutés* les uns aux autres, en nommant *nombres négatifs* ceux qui sont précédés du signe —. Par exemple, on regardera la différence $a - b$ comme résultant de l'addition de a avec $-b$,

$$a - b = a + (-b). \quad [1]$$

L'expression isolée $(-b)$ n'acquiert pour cela aucune signification; seulement on dit ajouter $-b$ au lieu de dire retrancher b. On convient de même que retrancher $-b$ signifie ajouter b.

$$a - (-b) = a + b. \quad [2]$$

Il serait absurde de chercher à démontrer les formules [1] et [2] : les définitions ne se démontrent pas. On peut remarquer, cependant, que la convention exprimée par la formule [2] est une conséquence toute naturelle de la première. Si l'on ne faisait pas, en effet, cette seconde convention, en ajoutant et retranchant successivement $-b$ à un nombre, les deux opérations ne se détruiraient pas.

8. Les deux conventions précédentes permettent de réduire la règle d'addition à l'énoncé suivant :

Pour ajouter deux polynomes, il faut ajouter au premier tous les termes du second, quels que soient leurs signes.

Soient en effet les deux polynomes

$$a - b + c \quad \text{et} \quad m - n + p - q,$$

leur somme est

$$a-b+c+m-n+p-q,$$

ce qui équivaut, d'après nos conventions, à

$$a-b+c+m+(-n)+p+(-q),$$

résultat conforme à l'énoncé.

9. Les mêmes conventions permettent de réduire la règle de soustraction des polynomes à l'énoncé suivant :

Pour retrancher un polynome d'une quantité quelconque A, *il suffit de retrancher successivement ses différents termes.*

Soit, en effet, à retrancher de A le polynome $m-n-p+q$, on a vu (**6**) que

$$A-(m-n-p+q)=A-m+n+p-q;$$

ou, d'après nos conventions,

$$A-(m-n-p+q)=A-m-(-n)-(-p)-q,$$

ce qui est conforme à l'énoncé.

Remarque. L'introduction des nombres négatifs permet d'énoncer, avec plus de concision, des résultats auxquels cette forme nouvelle n'ajoute absolument rien. Nous verrons que tel est toujours, en algèbre, le but de leur introduction.

10. Si l'on considère une différence $a-b$, et que l'on suppose b plus grand que a, l'opération est impossible; on convient alors de regarder l'expression $a-b$, comme représentant un nombre négatif égal à l'excès de b sur a.

$$a-b=-(b-a).$$

Cette convention est toute naturelle, et en ne la faisant pas on détruirait l'analogie complète qui existe entre les opérations relatives aux nombres négatifs et positifs. Soit, en effet, d l'excès de b sur a, $a-b$ est égal à $a-(a+d)$; si donc on applique la règle de soustraction (**9**), on aura

$$a-b=a-(a+d)=a-a-d=-d=-(b-a).$$

Remarque. Nous prouvons ainsi qu'il est naturel de faire la convention en question, mais nous ne *démontrons* pas la formule $a-b=-(b-a)$. Notre raisonnement, en effet, est fondé sur

l'application d'une règle de soustraction, qui, jusqu'ici, n'a de sens que pour des soustractions possibles ; il est naturel et commode de l'étendre à tous les cas, mais cela n'en est pas moins arbitraire.

11. La convention que nous venons de faire permet de généraliser des résultats que l'on devrait sans cela énoncer avec restriction ; on a, par exemple,

$$c + a - b = c + (a - b).$$

Cette formule est évidente lorsque a est plus grand que b. Notre convention la rend vraie dans tous les cas, car si a est moindre que b, on a $(a - b) = -(b - a)$, et par suite

$$c + (a - b) = c - (b - a) = c + a - b.$$

On verra de même que la formule

$$c - (a - b) = b + (c - a)$$

devient vraie, par suite de nos conventions, lors même que c est moindre que a.

12. Remarque. Dans les questions d'algèbre, a et b désignent des nombres indéterminés et l'on ne sait pas quel est le plus grand; on comprend dès lors, combien il est important que les formules s'appliquent indifféremment à tous les cas et quelle est par conséquent l'utilité des conventions relatives aux nombres négatifs.

RÉSUMÉ.

1. Le caractère de l'algèbre consiste en ce que l'on y étudie les opérations, indépendamment des nombres sur lesquels elles s'exécutent. — 2. Ce que l'on entend par formule algébrique. — 3. Divers avantages de l'emploi des formules : elles sont beaucoup plus simples à écrire que les théorèmes qu'elles expriment, et font souvent apercevoir, d'un coup d'œil, des conséquences qui exigeraient sans elles, une démonstration à part. Quelques exemples. — 4. Classification des formules ou expressions algébriques en rationnelles et irrationnelles, entières ou fractionnaires, monomes ou polynomes; ce que c'est qu'un coefficient ; ce qu'on entend par termes semblables d'un polynome. — 5. Addition algébrique : une somme reste la même dans quelque ordre que l'on ajoute les parties; pour ajouter à un nombre la somme de plusieurs autres, il suffit de lui ajouter successivement chacun d'eux; pour ajouter à un

Digitized by Google

nombre la différence de deux autres, il suffit d'ajouter le premier et de retrancher le second du résultat. Pour retrancher d'un nombre la somme de plusieurs autres, il suffit de retrancher successivement chacun d'eux ; pour retrancher d'un nombre la différence de deux autres, il faut ajouter le second et retrancher le premier du résultat. Formules qui expriment les principes. — 6. Règle générale d'addition et de soustraction des polynomes. — 7. Introduction des nombres négatifs pour simplifier l'énoncé des résultats précédents, ce qu'on entend par ajouter et retrancher un nombre négatif $-b$, les conventions sont faites de telle sorte, qu'en ajoutant et retranchant successivement $-b$ les opérations se détruisent. Ces conventions permettent de regarder tous les termes d'un polynome, quels que soient leurs signes, comme ajoutés les uns aux autres. — 8. Règle générale d'addition. — 9. Règle générale de soustraction. L'énoncé de ces règles se trouve simplifié par les conventions précédentes. — 10. L'expression $a-b$, lorsque b est plus grand que a, représente, par définition, un nombre négatif $-(b-a)$. Comment l'on est conduit à faire cette convention. — 11. Quelques formules qui deviennent générales si l'on adopte la convention précédente. — 12. Il est très-important que les formules d'algèbre ne changent pas avec la valeur des lettres, car cette valeur n'étant pas fixée, on ne saurait jamais si l'on doit les appliquer.

EXERCICES.

I. O —— A —— B

Deux courriers parcourent la ligne OA. Au départ, ils sont situés en A et B, à des distances a et b du point O; ils s'éloignent avec des vitesses v et v'. Trouver des formules pour exprimer, après le temps t, la distance des deux courriers, et la distance du point O au milieu de la droite qui les joint.

II. Vérifier la formule

$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab.$$

Montrer son identité avec

$$A^2-B^2=(A+B)(A-B.)$$

III. Sur un chemin de fer, lorsque la vitesse de convoi est constante, la traction que doit développer la locomotive se compose des frottements des roues de wagon sur les rails, et de la résistance de l'air. Le frottement est indépendant de la vitesse et proportionnel au poids total du train. La résistance de l'air

Digitized by Google

est, au contraire, indépendante du poids du convoi et proportionnelle au carré de la vitesse. Le frottement ayant une valeur connue F, pour un convoi dont le poids est P, et la résistance de l'air étant R lorsque la vitesse est V, trouver une formule qui exprime la traction lorsque le poids est P' et la vitesse V'.

IV. Trois vases contiennent des mélanges d'eau et de vin : le premier, a litres d'eau, b litres de vin ; le second a' litres d'eau, b' litres de vin ; le troisième, a'' litres d'eau, b'' litres de vin. On prend la moitié du liquide contenu dans le premier vase, et on le verse dans le second ; puis le tiers du liquide qui se trouve alors contenu dans celui-ci, et on le verse dans le troisième. Trouver une formule qui indique la quantité d'eau et celle de vin contenues dans chaque vase après les opérations.

V. Deux vases de capacité v et v' sont pleins, l'un d'eau, l'autre de vin. On remplit à la fois, dans ces deux vases, deux nouveaux vases de capacité U, et l'on verse dans v ce qui a été pris dans v', et réciproquement. On recommence trois fois cette opération. Trouver une formule qui exprime la quantité de vin contenue dans chacun des vases.

VI. Si l'on fait commencer l'année au 1er mars, prouver que le rang qu'occupe, parmi les jours de l'année, le m^e jour du $(n+1)^e$ mois est représenté par la formule

$$m + 31n - p,$$

p étant le plus grand nombre entier contenu dans la fraction

$$\frac{5n+4}{12}.$$

VII. On mélange H hectolitres d'eau-de-vie à D degrés avec H' hectolitres à D' degrés ; on demande le degré et le prix du mélange. On sait que le degré indique combien il y a de parties d'alcool sur cent d'eau-de-vie et que le prix de l'hectolitre étant P quand le degré est N, augmente ou diminue d'une quantité a pour chaque augmentation ou diminution d'une unité dans le degré.

Digitized by Google

CHAPITRE II.

MULTIPLICATION ALGÉBRIQUE.

Multiplication des monomes.

13. Pour multiplier deux produits de plusieurs facteurs, il faut former un produit unique composé des facteurs qui entrent dans chacun d'eux.

Dans un produit unique, on peut remplacer deux ou plusieurs facteurs par leur produit effectué (voy. l'*Arithmétique*).

D'après le premier de ces deux principes, le produit de deux monomes entiers est égal à un monome qui contient les facteurs de l'un et de l'autre; par exemple :

$$5a^2d^4c \times 4a^3b^2e = 5 \, . \, a^2 \, . \, d^4 \, . \, c \, . \, 4 \, . \, a^3 \, . \, b^2 \, . \, e.$$

En vertu du second des principes énoncés, on peut, dans le résultat, remplacer 5 et 4 par leur produit 20, a^3 et a^2 par leur produit a^5 (voy. l'*Arithmétique*); en sorte que le produit des deux monomes considérés est

$$5a^2d^4c \times 4a^3b^2e = 20a^5d^4b^2ce.$$

La méthode est générale, et conduit à la règle suivante :

Le produit de deux monomes entiers s'obtient en multipliant les coefficients entre eux, donnant à chaque lettre commune aux deux monomes (comme a dans l'exemple précédent) un exposant égal à la somme de ceux dont il est affecté dans chacun d'eux, et prenant les autres lettres comme facteurs, sans changer leurs exposants.

14. Pour multiplier l'un par l'autre, deux monomes fractionnaires, on remarque (voy. l'*Arithmétique*) que le produit de deux expressions fractionnaires est égal au produit des numérateurs divisé par celui des dénominateurs. Ces deux produits se feront d'après la règle précédente, et l'on indiquera ensuite leur division, en les séparant par une barre horizontale. On peut

Digitized by Google

ensuite simplifier le résultat, en supprimant les facteurs communs aux deux termes.

EXEMPLE. Soit $\frac{4a^3bc}{5f^2gh^2}$ à multiplier par $\frac{10af^3h^4}{7b^2g^3}$,

le produit est égal à

$$\frac{40a^4bcf^3h^4}{35f^2g^4h^2b^2};$$

mais on peut le simplifier en supprimant, aux deux termes, les facteurs 5, b, f^2 et h^2, il reste alors

$$\frac{8a^4cfh^2}{7g^4b}.$$

REMARQUE. Quand un monome fractionnaire est réduit à sa plus simple expression, aucune lettre ne doit figurer à la fois dans les deux termes, car alors, on pourrait la supprimer autant de fois qu'elle se trouve dans le terme où elle a le moindre exposant.

15. Ce qui précède permet de faire la multiplication d'un nombre quelconque de monomes. Il suffira, en effet, de multiplier les deux premiers, puis le produit, qui est un monome, par le troisième, et ainsi de suite.

Multiplication des polynomes.

16. Le produit de deux polynomes peut toujours être remplacé par un polynome unique, dont nous allons indiquer la loi de formation, et que l'on nomme souvent *leur produit effectué*.

1° Considérons deux polynomes dont tous les termes soient séparés par le signe $+$.

Soit

$$a+b+c$$

à multiplier par

$$p+q+r;$$

a, b, c, p, q, r désignant des nombres quelconques qui peuvent être eux-mêmes représentés par des expressions algébriques plus ou moins compliquées.

Digitized by Google

Pour multiplier un nombre quelconque par $p+q+r$, il faut évidemment, le multiplier par p, puis par q, puis par r, et ajouter les résultats ; par conséquent on a

$$(a+b+c)(p+q+r)=(a+b+c)p+(a+b+c)q+(a+b+c)r;$$

mais pour multiplier par p une somme $a+b+c$, il faut évidemment multiplier chaque partie par p, on a donc

$$(a+b+c)p=ap+bp+cp,$$

et de même

$$(a+b+c)q=aq+bq+cq,$$
$$(a+b+c)r=ar+br+cr:$$

et par suite

$$(a+b+c)(p+q+r)=ap+bp+cp+aq+bq+cq+ar+br+cr,$$

résultat que l'on peut énoncer ainsi :

Le produit de deux polynomes, dont les termes sont positifs, est égal à la somme des produits obtenus en multipliant tous les termes du multiplicande par tous ceux du multiplicateur.

17. Supposons maintenant que les deux polynomes à multiplier, contiennent des termes précédés du signe —.

Désignons par A l'ensemble des termes qui sont précédés du signe + dans le multiplicande, et par B l'ensemble de ceux qui sont précédés du signe —; par P et Q les sommes analogues dans le multiplicateur ; il faut multiplier

$$A-B$$

par

$$P-Q;$$

A, B, P, Q étant quatre polynomes à termes positifs. Or, pour multiplier un nombre quelconque par une différence $P-Q$, il faut, évidemment, le multiplier par P, puis par Q, et retrancher les résultats, on a donc

$$(A-B)(P-Q)=(A-B)P-(A-B)Q;$$

mais on a évidemment

$$(A-B)P=P(A-B)=PA-PB,$$
$$(A-B)Q=Q(A-B)=QA-QB,$$

Digitized by Google

d'où l'on conclut (6)

$$(A-B)P-(A-B)Q=PA-PB-QA+QB.$$

Telle est donc l'expression du produit demandé.

PA, PB, QA, QB sont des produits de polynomes à termes positifs; on les effectuera comme il a été dit (**16**). Il est évident que le résultat contiendra le produit de chaque terme du multiplicande par chaque terme du multiplicateur, chaque produit étant affecté d'un signe déterminé par les règles suivantes :

Les termes provenant de PA et de QB, c'est-à-dire du produit de deux termes précédés du signe + ou de deux termes précédés du signe —, sont précédés du signe +.

Les termes provenant de PB et de QA, c'est-à-dire du produit de deux termes précédés de signes différents, sont précédés du signe —.

Manière plus simple d'énoncer les résultats précédents.

18. L'énoncé des résultats précédents se simplifie si l'on considère, ainsi que nous l'avons déjà fait (**7**), les termes qui sont précédés du signe —, comme des nombres négatifs *ajoutés* aux termes précédents, et en adoptant en outre les définitions suivantes :

Le produit d'un nombre négatif $-a$ par un nombre positif $+b$, est $-(a\times b)$.

Le produit de deux nombres négatifs $-a$ et $-b$ est $a\times b$.

D'après ces *conventions,* la règle de multiplication peut s'énoncer en disant : *le produit de deux polynomes s'obtient en multipliant tous les termes du multiplicande par tous ceux du multiplicateur, et* AJOUTANT *les résultats obtenus.*

Soit, par exemple, à multiplier

$$a-b$$

par

$$c-d,$$

le produit est (**17**),

$$ac-bc-ad+bd,$$

ou, d'après nos conventions,

$$ac + (-b)c + (-d)a + (-b)(-d),$$

ce qui est bien la somme des produits obtenus en multipliant les termes a et $-b$ du multiplicande par les termes c et $-d$ du multiplicateur.

19. Remarque I. Il n'y a pas lieu de chercher à démontrer les formules

$$(-a)(b) = -ab$$
$$(-a)(-b) = ab,$$

elles expriment des définitions. Ces définitions permettent de renfermer sous un seul énoncé, les différents cas qu'il fallait distinguer, dans la règle de multiplication des polynomes.

20. Remarque II. On a vu (17) que

[1] $$(A-B)(M-P) = AM - AP - BM + BP.$$

La démonstration supposait que A et M fussent respectivement plus grands que B et P; les conventions que nous venons de faire rendent cette formule vraie, dans tous les cas.

Supposons, en effet, que l'un des facteurs soit négatif; que l'on ait, par exemple:

$$A < B$$
$$M > P.$$

$A - B$ étant négatif et égal à $-(B-A)$, on a, d'après nos conventions,

$$(A-B)(M-P) = -(B-A)(M-P) = -(BM - BP - AM + AP)$$
$$= -BM + BP + AM - AP,$$

ce qui coïncide, à l'ordre des termes près, avec la formule (1).

Supposons maintenant que les deux différences A—B et M—P soient négatives; leur produit sera (18) le même que si elles étaient prises positivement, et l'on aura

$$(A-B)(M-P) = (B-A)(P-M) = BP - BM - AP + AM,$$

ce qui est encore conforme à la formule (1).

21. Remarque III. Nous représenterons dorénavant un poly-

Digitized by Google

nome quelconque, de quelques signes que soient ses termes, par une expression de la forme

$$a + b + c + p + q + r;$$

a, b, c, p, q, r désignant des nombres positifs ou négatifs.

EXEMPLE. La formule

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

qui résulte immédiatement de la règle de multiplication, est vraie, par cela même, quels que soient les signes des quantités désignées par a et b. On peut donc supposer que b y représente un nombre négatif $-b'$. Cette formule devient alors

$$(a-b')^2 = a^2 + 2a(-b') + (-b')^2 = a^2 - 2ab' + b'^2.$$

Les formules qui donnent le carré d'une somme et celui d'une différence se trouvent ainsi ramenées à une seule.

22. REMARQUE IV. Les formules

$$(-a)b = -ab$$
$$(-a)(-b) = ab$$

expriment des conventions faites en supposant que a et b soient des nombres positifs; mais il est facile de voir que, par suite des mêmes conventions, ces formules ne cessent pas d'avoir lieu lors même que a et b désignent des nombres négatifs.

Supposons d'abord, en effet, que a désigne un nombre négatif $-a'$; $-a$ sera alors égal à a', et les formules deviendront :

$$a'b = -(-a')b$$
$$a'(-b) = (-a')b;$$

or $(-a')b$ est égal à $-a'b$, et $-(-a')b$ est par conséquent égal à $a'b$, ce qui démontre la première formule; $a'(-b)$ et $(-a')b$ sont l'un et l'autre égaux à $-a'b$, ce qui démontre la seconde.

Supposons maintenant que a et b représentent tous deux des nombres négatifs, $-a'$ et $-b'$; $-a$ et $-b$ seront alors égaux aux nombres positifs a' et b', et les formules deviendront :

$$a'(-b') = -(-a')(-b')$$
$$a'b' = (-a')(-b').$$

ce qui est d'accord avec les conventions.

Digitized by Google

23. Remarque V. Lorsque, dans un produit de plusieurs facteurs, quelques-uns sont négatifs, le produit se définit comme en arithmétique : c'est le résultat obtenu en multipliant le premier par le second; puis le produit effectué par le troisième facteur; puis le résultat par le quatrième, et ainsi de suite. Il suit de là que le produit aura même valeur absolue que si tous les facteurs étaient regardés comme positifs. Il sera précédé du signe $+$, si le nombre des facteurs négatifs est pair, et du signe $-$ s'il est impair : pour le démontrer, remarquons que l'on peut toujours introduire $+1$ comme premier facteur. Dans les multiplications successives que l'on aura à effectuer pour former le produit, le signe qui, d'après cela, est d'abord $+$, changera autant de fois qu'il y a de facteurs négatifs; or il est évident qu'il redeviendra $+$ si le nombre des changements est pair, et $-$ dans le cas contraire.

Il résulte évidemment de ce qui précède, que les puissances paires d'un nombre négatif sont positives, et les puissances impaires négatives.

24. Si l'on nomme quotient de deux nombres A et B, un troisième nombre qui, multiplié par le diviseur B reproduise le dividende A, il résulte évidemment des conventions précédentes que la valeur absolue du quotient de deux nombres ne dépend pas de leurs signes, et que ce quotient est positif si le dividende et le diviseur ont le même signe, et négatif dans le cas contraire.

Multiplication d'un nombre quelconque de polynomes.

25. Pour faire le produit d'un nombre quelconque de polynomes, il faut d'abord multiplier le premier par le second, puis le résultat par le troisième, et ainsi de suite. Le produit effectué de deux polynomes étant toujours un polynome, il suffira, quel que soit le nombre des facteurs, de savoir multiplier deux polynomes l'un par l'autre.

Soient P_1, P_2, P_3, P_4 les différents polynomes dont on veut former le produit; en multipliant P_1 par P_2, on obtiendra un produit Q_1 dont les termes sont (**18**) les produits de tous les termes de P_1 par tous ceux de P_2; on multipliera Q_1 par P_3, et on obtiendra un produit Q_2, qui sera la somme des produits de tous les ter-

Digitized by Google

mes de Q_1 par tous ceux de P_3; c'est-à-dire, la somme de tous les produits de trois facteurs obtenus, en prenant un facteur parmi les termes de P_1, un parmi les termes de P_2 et un enfin parmi les termes de P_3. Q_2 sera ensuite multiplié par P_4. Le résultat Q_3 de cette multiplication sera la somme des produits des termes de Q_2 par ceux de P_4; c'est-à-dire, de tous les produits de quatre facteurs pris respectivement dans les polynomes P_1, P_2, P_3, P_4. On pourra continuer indéfiniment le raisonnement, et l'on verra que le *produit des polynomes* $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$, *est la somme de tous les produits de* n *facteurs formés avec un terme de* P_1, *un terme de* P_2, *un terme de* P_3, ... *et un terme de* P_n.

Produit de deux polynomes ordonnés par rapport à une lettre.

26. On dit qu'un polynome est ordonné par rapport à une lettre, lorsque les termes sont placés dans l'ordre de grandeur des exposants de cette lettre; de telle sorte qu'en les considérant depuis le premier jusqu'au dernier les exposants aillent tous en diminuant ou tous en augmentant.

EXEMPLE. $$8x^5 + 3x^4 + 2x^2 - x - 1$$

est un polynome ordonné par rapport à x.

REMARQUE I. Si la lettre par rapport à laquelle on ordonne entrait dans plusieurs termes avec le même exposant, on réunirait ces termes en un seul et on regarderait cette puissance de la lettre ordonnatrice comme ayant pour coefficient la somme des facteurs qui la multiplient dans ces différents termes.

EXEMPLE. Pour ordonner le polynome

$$a^5 + 4a^3b + 2a^3c^2 + a^2b + c$$

par rapport à a, on l'écrira de la manière suivante :

$$a^5 + (4b + 2c^2)a^3 + ba^2 + c.$$

REMARQUE II. L'exposant de la lettre ordonnatrice dans un terme se nomme le degré de ce terme. Le degré d'un polynome est celui du terme de plus haut degré qu'il contienne.

Il n'y a rien à changer à la règle de multiplication lorsqu'on

Digitized by Google

veut l'appliquer à deux polynomes ordonnés suivant les puissances d'une lettre. Nous placerons seulement ici une remarque relative à la forme du résultat.

Lorsque le produit sera formé, on pourra diminuer le nombre de ses termes, en réunissant ceux qui sont semblables (4); mais on peut montrer, et cette remarque est très-importante, que deux termes au moins du produit, subsisteront sans réduction. Ces deux termes sont, le produit du premier terme du multiplicande par le premier terme du multiplicateur, et le produit du dernier terme du multiplicande par le dernier terme du multiplicateur.

Il est évident, en effet, que le premier de ces produits contiendra la lettre ordonnatrice à une puissance plus élevée, et le second à une puissance moins élevée que tous les autres. Ils ne pourront donc pas se réduire avec eux, tant que la lettre ordonnatrice restera indéterminée.

EXEMPLE. Si on multiplie

$$x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

par

$$x - 1,$$

le terme x^8 et le terme -1 qui proviennent de la multiplication des premiers termes entre eux, et des derniers termes entre eux, ne se réduiront avec aucun autre. Si on effectue le produit, on voit qu'il se réduit à ces deux seuls termes, les autres se détruisant deux à deux.

27. Le produit de deux polynomes est, d'après ce qui précède, composé de deux termes au moins. Si les polynomes contiennent plusieurs lettres, on pourra les ordonner successivement par rapport à chacune d'elles, et en appliquant la remarque précédente on obtiendra un certain nombre de termes qui devront subsister sans réduction dans le produit. Si, par exemple, on multiplie les deux polynomes suivants, ordonnés par rapport à a

$$a^4 + a^3b^5 + a^2b^3 + b^4,$$
$$a^6 + a^4b + a^3b^7 + ab^2.$$

Les termes $a^4 \times a^6$, $b^4 \times ab^2$ devront subsister sans réduction dans le produit. Si l'on ordonne les mêmes polynomes par rap-

port à b, les premiers termes sont a^3b^5 et a^3b^7 et les derniers a^4 et a^6; les deux termes $a^3b^5 \times a^3b^7$ et $a^4 \times a^6$ devront donc subsister sans réduction dans le résultat. Le terme $a^4 \times a^6$ se présente, comme on voit, de deux manières différentes, et nous avons seulement trois termes distincts qui, dans le résultat, ne peuvent éprouver aucune réduction.

RÉSUMÉ.

13. On rappelle deux théorèmes démontrés en arithmétique : 1° Pour multiplier deux produits l'un par l'autre, il suffit de former un produit unique avec les facteurs qui entrent dans chacun d'eux ; 2° Dans ce produit unique on peut remplacer deux ou plusieurs facteurs par leur produit effectué. — Règle de multiplication des monomes. — **14** Multiplication des monomes fractionnaires ; d'après ce qui a été démontré en arithmétique, il faut multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux ; on simplifie ensuite le résultat en supprimant les facteurs communs. Quand un monome fractionnaire est réduit à sa plus simple expression, aucune lettre ne doit figurer à la fois dans les deux termes. — **15**. Ce qui précède permet de multiplier un nombre quelconque de monomes. — **16**. Multiplication de deux polynomes à termes positifs. — **17**. Cas où les polynomes contiennent des termes précédés du signe —. — **18**. Expression plus simple des résultats précédents, en regardant les termes précédés du signe — comme des nombres négatifs *ajoutés* aux termes qui précèdent, et en adoptant des conventions convenables sur le produit de deux nombres négatifs ou d'un nombre négatif par un nombre positif. — **19**. Il n'y a pas lieu de chercher à démontrer les conventions relatives au produit des nombres négatifs ; ces conventions sont arbitraires : il y a seulement un avantage de simplicité à adopter celles que nous avons choisies. — **20**. Ces conventions ont en outre l'avantage d'étendre la formule de multiplication de deux polynomes au cas où l'ensemble des termes négatifs l'emporte sur celui des termes positifs. — **21**. Quels que soient les termes d'un polynome, on peut le considérer comme une somme de termes dont quelques-uns sont négatifs ; on peut de cette manière réduire à une seule les deux formules qui donnent le carré d'une somme et le carré d'une différence. — **22**. Les formules $ab = (-a)(-b)$, $a(-b) = -ab$, sont vraies, quels que soient les signes des nombres représentés par a et b. — **23**. Remarque sur le signe d'un produit de plusieurs facteurs. — **24**. Définition de la division quand le dividende et le diviseur ne sont pas tous deux positifs. — **25**. Multiplication d'un nombre quelconque de polynomes ; le produit est la somme

Digitized by Google

des produits que l'on peut faire en prenant pour facteur un terme de chaque polynome. — **26**. Ce qu'on entend par polynome ordonné par rapport à une lettre. La règle de multiplication est la même, seulement il y a souvent réduction entre des termes semblables; mais on remarque que deux termes au moins du produit ne peuvent se réduire. — **27**. Quand les polynomes contiennent plusieurs lettres, la règle précédente fait quelquefois connaître plus de deux termes du produit qui ne peuvent se réduire.

EXERCICES.

I. Le carré d'un polynome est égal à la somme des carrés des termes, plus deux fois la somme de leurs produits deux à deux.

II. Le cube d'un polynome est égal à la somme des cubes des termes, plus trois fois la somme des produits de l'un des termes par le carré d'un autre, plus six fois la somme des produits des termes trois à trois.

III. $$(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2)=(ap+bq+cr+ds)^2 + (aq-bp+cs-dr)^2+(ar-cp+dq-bs)^2 + (br-cq+as-dp)^2.$$

IV. Si l'on pose

$$\begin{aligned} a+b+c+d&=A \\ a+b-c-d&=B \end{aligned} \quad \text{et que } ab(a^2+b^2)=cd(c^2+d^2)$$

$$\begin{aligned} a-b+c-d&=C \\ a-b-c+d&=D \end{aligned} \quad \text{on aura } AB(A^2+B^2)=CD(C^2+D^2).$$

V. Si l'on pose

$$bc-p^2=A,\quad ac-q^2=B,\quad ab-r^2=C,$$
$$qr-ap=P,\quad pr-bq=Q,\quad pq-cr=R,$$

on aura

$$(abc+2pqr-ap^2-bq^2-cr^2)^2=ABC+2PQR-AP^2-BQ^2-CR^2.$$

VI. Si l'on pose

$$\begin{aligned} A&=3abc-a^2d-2b^3,\\ B&=2ac^2-abd-b^2c,\\ C&=acd-2b^2d+bc^2,\\ D&=ad^2-3bcd+2c^3, \end{aligned}$$

Digitized by Google

on aura

$$(a^2d^2 - 3b^2c^2 + 4ac^3 + 4db^3 - 6abcd)^2$$
$$= A^2D^2 - 3B^2C^2 + 4AC^3 + 4DB^3 - 6ABCD.$$

VII. Si l'on pose

$$A = bc' + cb' + aa',$$
$$B = ab' + ba' + cc',$$
$$C = ac' + ca' + bb';$$

on a $\quad (a+b+c)(a'+b'+c') = A + B + C,$

$$(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)(a'^2+b'^2+c'^2-a'b'-a'c'-b'c')$$
$$= A^2+B^2+C^2-AB-AC-BC,$$

$$(a^3+b^3+c^3-3abc)(a'^3+b'^3+c'^3-3a'b'c') = A^3+B^3+C^3-3ABC,$$

VIII. $a, b, c \ldots k, l$, désignant des nombres quelconques, on a

$$ab(a+b) + (a+b)c(a+b+c) + (a+b+c)d(a+b+c+d) + \ldots$$
$$+ (a+b+c+d+\ldots+k)l(a+b+c+d+\ldots+k+l)$$
$$= lk(l+k) + (l+k)j(l+k+j) + \ldots (l+k+j\ldots+b)a(l+k+j\ldots+b+a).$$

IX. $2q^2+3z^2+6t^2$ est égal à la somme de trois carrés.

X. Soient x, y, z, u, v, w des nombres quelconques. Si on pose

$$m = \frac{x-y}{x+y},\ p = \frac{y-z}{y+z},\ q = \frac{z-u}{z+u}\ r = \frac{u-v}{u+v},\ s = \frac{v-w}{v+w},\ t = \frac{w-x}{w+x}$$

prouver que

$$(1+m)(1+p)(1+q)(1+r)(1+s)$$
$$= (1-p)(1-q)(1-r)(1-s)(1-m).$$

XI. $$(p^2+q^2+r^2+s^2+t^2)(p'^2+q'^2+r'^2+s'^2+t'^2)$$
$$-(pp'+qq'+rr'+ss'+tt')^2$$

est une somme de carrés.

XII. Dans le développement de $(1+x+2x^2+3x^3+\ldots+nx^n)^2$ le coefficient de x^p, p étant moindre que n, est égal à $\dfrac{p^3+11p}{6}$.

Digitized by

XIII. Vérifier que

$$\frac{x^2y^2z^2}{b^2c^2}+\frac{(x^2-b^2)(y^2-b^2)(z^2-b^2)}{b^2(b^2-c^2)}+\frac{(x^2-c^2)(y^2-c^2)(z^2-c^2)}{c^2(c^2-b^2)}$$
$$=x^2+y^2+z^2-c^2-b^2.$$

XIV. Vérifier que

$$\frac{y^2z^2}{b^2c^2}+\frac{(z^2-b^2)(b^2-y^2)}{b^2(c^2-b^2)}+\frac{(c^2-z^2)(c^2-y^2)}{c^2(c^2-b^2)}=1.$$

XV. Vérifier que

$$\frac{x^2z^2}{b^2c^2}+\frac{(x^2-b^2)(b^2-z^2)y^2}{(y^2-b^2)b^2(c^2-b^2)}+\frac{(x^2-c^2)(c^2-z^2)y^2}{(c^2-y^2)c^2(c^2-b^2)}$$
$$=\frac{(x^2-y^2)(y^2-z^2)}{(y^2-b^2)(c^2-y^2)}.$$

XVI. Vérifier que

$$\frac{1}{p^3q^3}=\frac{1}{(p+q)^3}\left\{\frac{1}{p^3}+\frac{1}{q^3}\right\}+\frac{2}{(p+q)^3}\left\{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right\}.$$

XVII. Vérifier que

$$\frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})(1-x^{m-2})\ldots(1-x^{m-p})}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^{p+1})}$$
$$=\frac{(1-x^{m-1})(1-x^{m-2})\ldots(1-x^{m-p-1})}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^{p+1})}$$
$$+x^{m-p-1}\frac{(1-x^{m-1})(1-x^{m-2})\ldots(1-x^{m-p})}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^p)}.$$

CHAPITRE III.

CALCUL DES RADICAUX, EXPOSANTS NÉGATIFS ET FRACTIONNAIRES.

---

28. Le radical $\sqrt[m]{a}$ représente un nombre dont la puissance m^{me} est égale à a. Si nous nous bornons à considérer les nombres positifs, $\sqrt[m]{a}$ a, d'après cette définition, une valeur unique et déterminée ; mais les conventions faites dans le chapitre précédent nous obligent, dès à présent, à lui attribuer un sens plus étendu.

1° Si a est positif, et que m soit pair, la puissance m^{me} du nombre négatif, égal en valeur absolue à $\sqrt[m]{a}$, sera égale à a ; car un nombre pair de facteurs négatifs donne (**23**) un produit positif.

$\sqrt[m]{a}$ admet donc, dans ce cas, deux valeurs égales et de signes contraires.

Exemple. $\sqrt{4}$ représente à la fois, d'après nos conventions, -2 et 2 : car les deux nombres ont l'un et l'autre 4 pour carré.

2° Si a est positif et m impair, il n'y a pas lieu, *pour le moment*, d'attribuer à $\sqrt[m]{a}$ une signification plus générale qu'en arithmétique.

3° Si a est négatif et m pair, $\sqrt[m]{a}$ ne représente aucun nombre positif ou négatif, car les puissances paires d'un nombre sont toujours positives (**23**).

4° Enfin, si a étant négatif et égal à $-a'$, m est impair, $\sqrt[m]{-a'}$ représente un nombre négatif égal à $-\sqrt[m]{a'}$, et l'on a

$$\sqrt[m]{-a'} = -\sqrt[m]{a'}.$$

En effet, m étant impair, la puissance m^{me} de $-\sqrt[m]{a'}$ sera $-a'$ (**23**).

Exemple. $$\sqrt[3]{-8} = -2.$$

Car le cube de -2 est -8.

Ces généralisations sont, en algèbre, d'une grande impor-

Digitized by Google

tance ; elles recevront plus tard de grands développements. Nous avons cru devoir saisir la première occasion de les indiquer ; mais il n'en sera plus question dans le reste de ce chapitre : nous y considérerons seulement les racines positives des nombres positifs.

Simplification d'un radical.

29. Lorsque le signe radical porte sur un nombre élevé lui-même à une puissance, on peut souvent lui faire subir une simplification.

1° Si l'indice de la racine est égal au degré de la puissance, les deux opérations se détruisent. Ainsi l'on a

$$\sqrt[m]{a^m} = a.$$

2° S'il existe un facteur commun à l'indice de la racine et à l'exposant de la puissance, on peut le supprimer. Ainsi l'on a

$$\sqrt[mp]{a^{np}} = \sqrt[m]{a^n}.$$

Pour le prouver, il suffit de remarquer qu'en élevant ces deux expressions à la puissance mp, on obtient des résultats égaux. On a en effet

$$(\sqrt[mp]{a^{np}})^{mp} = a^{np},$$
$$(\sqrt[m]{a^n})^{mp} = [(\sqrt[m]{a^n})^m]^p = (a^n)^p = a^{np}.$$

Toutes ces formules sont évidentes, si on se rappelle (voy. l'*Arithmétique*) que la puissance mp d'un nombre est égale à la puissance m^{me} de sa puissance p^{me}.

4° S'il se trouve, sous un radical, un facteur dont l'exposant soit égal à l'indice de la racine, on peut le faire sortir du radical en supprimant son exposant. Ainsi l'on a

$$\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}.$$

Pour le prouver, il suffit de remarquer qu'en élevant ces deux expressions à la puissance n, on obtient des résultats égaux, car on a

$$(\sqrt[n]{a^n b})^n = a^n b,$$
$$(a\sqrt[n]{b})^n = a^n(\sqrt[n]{b})^n = a^n b.$$

Digitized

Ces formules sont évidentes si on se rappelle que la n^{me} puissance d'un produit est le produit des n^{mes} puissances des facteurs.

Puissance d'un radical.

30. Pour former une puissance d'un radical, il suffit d'élever à cette puissance, le nombre placé sous le radical. Ainsi l'on a

$$(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}.$$

Pour le démontrer, il suffit de remarquer que la puissance m^{me} de ces deux expressions est la même. On a en effet

$$[(\sqrt[m]{a})^n]^m = (\sqrt[m]{a})^{mn} = [(\sqrt[m]{a})^m]^n = a^n,$$
$$(\sqrt[m]{a^n})^m = a^n.$$

Toutes ces égalités sont évidentes, si l'on se rappelle que la puissance m^{me} de la puissance n^{me} d'un nombre est égale à sa puissance mn^{me} (voy. l'*Arithmétique*).

Racines d'un radical.

31. Pour extraire la racine m^{me} d'un radical, il suffit de multiplier l'indice par m ; ainsi l'on a

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

Pour le prouver, il suffit de remarquer que ces deux expressions élevées à la puissance mn donnent des résultats égaux ; on a en effet

$$(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{mn} = [(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^m]^n = (\sqrt[n]{a})^n = a,$$
$$(\sqrt[mn]{a})^{mn} = a.$$

Réduction de plusieurs radicaux au même indice.

32. On peut remplacer deux radicaux quelconques $\sqrt[m]{a}$ et $\sqrt[n]{b}$ par deux autres de même indice.

On a en effet (**29**) $\quad \sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^n},$

$$\sqrt[n]{b} = \sqrt[mn]{b^m}.$$

Digitized by Google

Un nombre quelconque de radicaux $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[p]{c}$, $\sqrt[q]{d}$ peuvent être ramenés à l'indice commun $mnpq$. On a en effet

$$\sqrt[m]{a}=\sqrt[mnpq]{a^{npq}},$$
$$\sqrt[n]{b}=\sqrt[mnpq]{b^{mpq}},$$
$$\sqrt[p]{c}=\sqrt[mnpq]{c^{mnq}},$$
$$\sqrt[q]{d}=\sqrt[mnpq]{d^{mnp}}.$$

On peut même donner à plusieurs radicaux un indice commun égal au plus petit multiple commun de leurs indices. Soient par exemple deux radicaux $\sqrt[m]{a}$ et $\sqrt[n]{b}$, et μ un multiple de m et de n, de telle sorte que

$$\mu=m\alpha \quad \mu=n\beta;$$

on aura évidemment

$$\sqrt[m]{a}=\sqrt[m\alpha]{a^{\alpha}}=\sqrt[\mu]{a^{\alpha}},$$
$$\sqrt[n]{b}=\sqrt[n\beta]{b^{\beta}}=\sqrt[\mu]{b^{\beta}}.$$

Produit de plusieurs radicaux.

33. Pour multiplier plusieurs radicaux de même indice, il suffit de multiplier les nombres placés sous ces radicaux et d'affecter le produit de l'indice commun.

Ainsi l'on a

$$\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}\sqrt[m]{c}=\sqrt[m]{abc};$$

pour le prouver, il suffit de remarquer que ces deux expressions ont même puissance m^e; on a en effet

$$(\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}\sqrt[m]{c})^m=(\sqrt[m]{a})^m(\sqrt[m]{b})^m(\sqrt[m]{c})^m=abc,$$
$$(\sqrt[m]{abc})^m=abc.$$

Si l'on veut multiplier des radicaux quelconques, on les ramènera au même indice, et on appliquera ensuite la règle précédente.

Exemple. On a

$$\sqrt[p]{a^m}\times\sqrt[q]{a^n}=\sqrt[pq]{a^{mq}}\times\sqrt[pq]{a^{np}}=\sqrt[pq]{a^{mq+np}}.$$

Quotient de deux radicaux.

34. Pour diviser, l'un par l'autre, deux radicaux qui ont même indice, il suffit de diviser le nombres placés sous ces radicaux et d'affecter le quotient de l'indice commun.

Ainsi l'on a

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}.$$

Pour le prouver, il suffit de remarquer que ces deux expressions ont même puissance m^e ; on a en effet

$$\left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m = \frac{(\sqrt[m]{a})^m}{(\sqrt[m]{b})^m} = \frac{a}{b},$$

$$\left(\sqrt[m]{\frac{a}{b}}\right)^m = \frac{a}{b}.$$

Si l'on veut diviser, l'un par l'autre, deux radicaux quelconques, on les ramènera au même indice et on appliquera ensuite la règle précédente.

Exemple. On a

$$\frac{\sqrt[p]{a^m}}{\sqrt[q]{b^n}} = \frac{\sqrt[pq]{a^{mq}}}{\sqrt[pq]{b^{np}}} = \sqrt[pq]{\frac{a^{mq}}{b^{np}}}.$$

Notation des exposants fractionnaires.

35. Les résultats précédents peuvent s'énoncer plus simplement si l'on convient de représenter $\sqrt[n]{a^m}$ par $a^{\frac{m}{n}}$, en désignant $\frac{m}{n}$ sous le nom d'*exposant* de a.

Avant de montrer l'avantage de cette notation dans l'énoncé des propositions précédentes, nous ferons remarquer qu'elle n'implique pas contradiction, et que, l'expression $a^{\frac{m}{n}}$ conserve la même valeur, si on y rempla ce $\frac{m}{n}$ par une fraction égale. En d'autres termes, si l'on a

$$\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'},$$

Digitized by Google

on aura aussi $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m'}{n'}}$.

c'est-à-dire $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n']{a^{m'}}$;

pour le démontrer, réduisons ces deux radicaux au même indice, ils deviendront

$$\sqrt[n'n]{a^{mn'}}, \quad \sqrt[n'n]{a^{m'n}},$$

ce qui est identiquement la même chose, puisque l'égalité $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ entraîne évidemment $mn' = m'n$.

36. Nous allons montrer que cette nouvelle notation permet de généraliser plusieurs théorèmes.

1° On a (**30**)

$$(\sqrt[n]{a^m})^p = \sqrt[n]{a^{mp}},$$

ou, dans notre nouvelle notation,

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p = a^{\frac{mp}{n}};$$

donc, pour élever une puissance fractionnaire $a^{\frac{m}{n}}$ à une puissance entière p, il suffit de multiplier son exposant par p;

2° On a (**31**) $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[np]{a^m}$,

ou, dans notre nouvelle notation,

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{1}{p}} = a^{\frac{m}{np}};$$

donc, pour élever une expression $a^{\frac{m}{n}}$ à la puissance $\frac{1}{p}$, il suffit de multiplier son exposant par $\frac{1}{p}$;

3° On a (**30-31**) $\sqrt[q]{(\sqrt[n]{a^m})^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[nq]{a^{mp}}$,

ou, dans notre nouvelle notation,

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}};$$

donc, *pour élever une expression* $a^{\frac{m}{n}}$ *à la puissance* $\frac{p}{q}$, *il suffit de multiplier son exposant par* $\frac{p}{q}$.

Digitized by Google

Cette dernière proposition comprend les deux précédentes qui en résultent évidemment si l'on fait $p=1$ ou $q=1$. Elle est d'ailleurs facile à retenir, à cause de son analogie avec une proposition relative aux puissances entières.

4° On a (33) $\sqrt[n]{a^m}\times\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[nq]{a^{np+mq}}$,

ou, dans notre nouvelle notation,

$$a^{\frac{m}{n}}\times a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{mq+np}{nq}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}};$$

donc, pour *multiplier deux puissances d'un même nombre, il suffit d'ajouter les exposants.*

5° On a (34) $\dfrac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[q]{a^p}}=\dfrac{\sqrt[nq]{a^{mq}}}{\sqrt[nq]{a^{np}}}=\sqrt[nq]{\dfrac{a^{mq}}{a^{np}}}.$

Si l'on suppose $mq>np$, cette égalité peut s'écrire

$$\frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[q]{a^p}}=\sqrt[nq]{a^{mq-np}},$$

ou, dans notre nouvelle notation,

$$\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}}=a^{\frac{mq-np}{nq}}=a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}.$$

Si l'on remarque que l'on a supposé $mq>np$, et, par suite, $\frac{m}{n}>\frac{p}{q}$, ce résultat peut s'énoncer ainsi : *pour diviser une puissance d'un nombre par une autre puissance de moindre exposant, il suffit de retrancher les exposants.*

Comme dans les cas précédents, l'analogie est complète avec les théorèmes relatifs aux exposants entiers.

Exposants négatifs.

37. On représente souvent l'expression $\frac{1}{a^m}$ par a^{-m}, m désignant, ici, un nombre positif entier ou fractionnaire. Cette

notation permet, comme on va le voir, de généraliser encore davantage les théorèmes énoncés plus haut.

38. Remarquons d'abord que l'égalité

$$[1] \qquad a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

ayant lieu, par définition, quand m est positif, est vraie, par cela même, pour des valeurs négatives de m; si l'on suppose, en effet, $m = -m'$, $-m$ deviendra m', et la formule [1] se changera en

$$a^{m'} = \frac{1}{a^{-m'}};$$

ou, en remplaçant $a^{-m'}$ par sa valeur $\frac{1}{a^{m'}}$,

$$a^{m'} = \frac{1}{\frac{1}{a^{m'}}},$$

ce qui est évidemment exact.

39. La convention précédente permet, comme nous l'avons dit, de généraliser différents théorèmes:

1° La formule

$$[1] \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

n'a été démontrée (36, 5°) que pour $m > n$; elle est vraie lors même que $m < n$; en effet, on a évidemment dans ce cas

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{a^m}} = \frac{1}{a^{n-m}};$$

or, d'après notre convention,

$$\frac{1}{a^{n-m}} = a^{-(n-m)} = a^{m-n},$$

on a donc enfin,

$$[2] \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Remarque. Si l'on supposait $m = n$, $\frac{a^m}{a^n}$ serait égal à l'unité, et a^{m-n} deviendrait a^0, si donc nous voulons que la formule [2]

Digitized by Google

s'étende à ce cas, il faut *convenir* de regarder la puissance zéro d'un nombre comme égale à l'unité. C'est là une convention, et il n'y a pas lieu à démonstration.

2° On a (36, 3°) la formule

$$[3] \qquad (a^m)^n = a^{mn},$$

quels que soient les nombres positifs m et n. Cette formule est encore vraie si l'un des deux, ou tous les deux, sont négatifs.

Supposons d'abord m positif et n négatif, égal à $-n'$, la formule [3] devient

$$(a^m)^{-n'} = a^{-mn'},$$

ou, d'après nos conventions,

$$\frac{1}{(a^m)^{n'}} = \frac{1}{a^{mn'}},$$

ce qui est exact, puisque $(a^m)^{n'} = a^{mn'}$.

Supposons m négatif égal à $-m'$ et n positif : la formule [3] devient

$$(a^{-m'})^n = a^{-m'n}$$

ou, d'après nos conventions,

$$\left(\frac{1}{a^{m'}}\right)^n = \frac{1}{a^{m'n}},$$

ce qui est évidemment exact.

Supposons enfin m et n négatifs et égaux à $-m'$ et $-n'$: la formule à démontrer devient

$$(a^{-m'})^{-n'} = a^{(-m')(-n')} = a^{m'n'},$$

or, d'après nos conventions,

$$(a^{-m'})^{-n'} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{m'}}\right)^{n'}} = \frac{1}{\frac{1}{a^{m'n'}}} = a^{m'n'},$$

ce qui démontre encore la formule [3] dans ce dernier cas.

3° On a (36, 4°)

$$[4] \qquad a^m \times a^n = a^{m+n},$$

quels que soient les nombres positifs m et n.

Cette formule est encore vraie si l'un des deux nombres m et

Digitized by Google

n ou tous les deux sont négatifs. Supposons d'abord m positif et n négatif égal à $-n'$; cette formule deviendra

$$a^m \times a^{-n'} = a^{m-n'}.$$

Remplaçons $a^{-n'}$ par $\frac{1}{a^{n'}}$, elle devient

$$\frac{a^m}{a^{n'}} = a^{m-n'},$$

ce qui a été démontré (39, 1°).

4° Supposons maintenant m et n négatifs et égaux à $-m'$, $-n'$: la formule [4] devient

$$a^{-m'} \times a^{-n'} = a^{-m'-n'}$$

ou

$$\frac{1}{a^{m'}} \times \frac{1}{a^{n'}} = \frac{1}{a^{m'+n'}}$$

ce qui est évidemment exact.

5° La formule [4] entraîne évidemment la suivante :

[5] $$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},$$

car en remplaçant $\frac{1}{a^n}$ par sa valeur a^{-n}, cette dernière devient

$$a^m \times a^{-n} = a^{m-n}$$

ou, ce qui est la même chose,

$$a^m \times a^{-n} = a^{m+(-n)},$$

qui a lieu (3°), quels que soient les nombres, positifs ou négatifs, m et n.

RÉSUMÉ.

28. Définition de l'expression $\sqrt[n]{a}$; si n est pair, elle est susceptible de deux valeurs quand a est positif, et n'en représente aucune quand a est négatif. — 29. Simplifications d'un radical $\sqrt[n]{a^m}$, lorsque m et n ont un facteur commun. Simplifications du radical $\sqrt[n]{a^n b}$. — 30. Puissances d'un radical. — 31. Racines d'un radical. — 32. Réduction de plusieurs radicaux au même indice; on peut prendre pour indice commun le plus petit multiple commun des indices. — 33. Produit de plusieurs radicaux qui ont même indice ; on peut multiplier des radicaux quelconques en les réduisant au même indice. — 34. Quotient de deux radicaux qui ont même

Digitized by Google

indice ; on peut diviser deux radicaux quelconques en les réduisant au même indice. — **35**. Notation des exposants fractionnaires ; elle n'implique pas contradiction. — **36**. Pour élever une puissance fractionnaire à une puissance entière p, il suffit de multiplier son exposant par p. Pour extraire la racine $p^{\text{ème}}$ d'une puissance fractionnaire, il faut diviser son exposant par p. Pour élever une puissance fractionnaire à la puissance $\frac{p}{q}$, il faut multiplier son exposant par $\frac{p}{q}$; ce théorème comprend les deux précédents. Pour multiplier deux puissances fractionnaires d'un même nombre, il suffit d'ajouter les exposants. Pour diviser deux puissances fractionnaires d'un même nombre, il faut retrancher les exposants, pourvu toutefois que la soustraction soit possible. — **37**. Notation des exposants négatifs. — **38**. La formule $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ est vraie, quel que soit le signe de m. — **39**. La formule $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ a lieu lors même que m est moindre que n. — Définition de l'expression a^0. La formule $(a^m)^n = a^{mn}$ est vraie quels que soient les signes de m et de n. — Il en est de même de la formule $a^m \times a^n = a^{m+n}$. On en conclut également, pour des valeurs positives ou négatives de m et de n, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

EXERCICES.

I. $$x = \left[-q + (q^2 + p^3)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}} + \left[-q - (q^2 + p^3)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}},$$

satisfait à l'équation

$$x^3 + 3px + 2q = 0.$$

II. On a

$$\left[\frac{a + (a^2 - b)^{\frac{1}{2}}}{2}\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{a - (a^2 - b)^{\frac{1}{2}}}{2}\right]^{\frac{1}{2}} = \left(a + b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

III. Réduire $$\frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} - \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}}.$$

IV. $$\left\{\left[f + (f^2 + e^3)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}} + \left[f - (f^2 + e^3)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}\right\}^2 + 2e =$$

$$\left\{e^3 + 2f^2 + \left[(e^3 + 2f^2)^2 - e^6\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}} + \left\{e^3 + 2f^2 - \left[(e^3 + 2f^2)^2 - e^6\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}}.$$

Digitized by Google

CHAPITRE IV.

ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A UNE INCONNUE.

Définitions.

40. On nomme identité l'expression d'une égalité qui a lieu entre deux quantités numériques, ou entre deux formules indépendamment de toute valeur particulière attribuée aux lettres qu'elles renferment.

EXEMPLES. $5=5,\quad 8=7+1,$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

$$a^m\times a^n=a^{m+n},$$

sont des identités.

41. On distingue, plus spécialement, sous le nom d'*équation,* l'expression d'une égalité qui, n'ayant lieu que pour certaines valeurs des lettres qu'elle renferme, peut servir à la détermination de ces valeurs.

Les deux quantités dont l'équation exprime l'égalité, se nomment les deux *membres* de l'équation. Les lettres dont on cherche à déterminer la valeur, de manière à rendre exactes une ou plusieurs équations, se nomment les *inconnues* de ces équations. Leur détermination constitue la *résolution* de l'équation ou des équations considérées. La résolution des équations est la partie la plus importante, et, d'après quelques auteurs, le but véritable de l'algèbre.

Principes généraux relatifs aux équations.

42. THÉORÈME. *On peut ajouter un même nombre aux deux membres d'une équation, sans altérer les conditions qu'elle impose aux inconnues.* Il est évident, en effet, que les équations

$$A=B,$$

$$A+m=B+m,$$

Digitized by Google

sont parfaitement équivalentes, car l'une quelconque des deux entraîne l'autre.

Remarque I. m désigne un nombre quelconque positif ou négatif; nous n'ajoutons donc rien à la généralité de l'énoncé précédent, en disant, *on peut, sans altérer la signification d'une équation, ajouter ou retrancher un même nombre, à ses deux membres.*

Remarque II. Si le nombre m est égal et de signe contraire à l'un des termes de l'équation, il le détruira, et ce terme disparaîtra du membre où il se trouvait pour reparaître dans l'autre avec un signe différent.

Exemple. Soit l'équation

$$2+x=5-3x,$$

en ajoutant $-x$ aux deux membres, on obtient

$$2=5-3x-x,$$

et le terme x a passé, comme on voit, d'un membre dans l'autre, en changeant de signe.

43. Théorème. *On peut multiplier les deux membres d'une équation par un même nombre sans altérer les conditions qu'elle impose aux inconnues.*

Il est évident en effet que les égalités

$$A=B$$
$$mA=mB$$

sont parfaitement équivalentes : car chacune d'elles entraîne l'autre.

Remarque I. Le principe précédent suppose essentiellement que m soit différent de 0. Lors donc qu'on aura multiplié les deux membres d'une équation par un nombre indéterminé, il faudra, dans les raisonnements qui suivront, éviter les hypothèses qui rendraient ce nombre égal à 0.

Remarque II. En multipliant les deux membres d'une équation par le produit des dénominateurs de ses différents termes, on fait disparaître tous les dénominateurs. On dit alors qu'on a chassé les dénominateurs.

Digitized by Google

Exemple. L'équation

$$[1] \qquad 2+\frac{1}{x}=x-1+\frac{3}{x+1}$$

devient, si on multiplie les deux membres par $x(x+1)$,

$$[2] \qquad 2x^2+2x+x+1=x^2-x+3x.$$

On doit remarquer cependant, que l'on ne pourrait substituer les équations [1] et [2] l'une à l'autre, si l'on avait $x=0$ ou $x=-1$: car ces deux hypothèses annullent le facteur $x(x+1)$, par lequel on a multiplié les deux membres de l'équation.

Quelquefois l'habitude du calcul fait apercevoir un facteur plus simple que le produit des dénominateurs, et qui peut servir à les faire disparaître : soit, par exemple, l'équation

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}=\frac{1}{x^2-a^2}$$

pour faire disparaître les dénominateurs, il suffira de multiplier les deux membres par x^2-a^2, qui est égal au produit de $x-a$ par $x+a$ et l'on aura

$$x+a+x-a=1.$$

Remarque III. Puisque l'on peut multiplier les deux membres d'une équation par un nombre quelconque, on peut aussi les diviser par un nombre quelconque : car la division par m revient à la multiplication par $\frac{1}{m}$. Il faut seulement que le nombre m, par lequel on divise, ne soit jamais supposé nul. Lors donc qu'on aura divisé les deux membres d'une équation par un même nombre m, il faudra s'abstenir, dans la suite des raisonnements, des hypothèses qui rendraient ce nombre égal à zéro.

Exemple. L'équation

$$(x-1)(2x+1)=(x-1)\left(3+\frac{1}{x}\right)$$

peut être remplacée par

$$2x+1=3+\frac{1}{x},$$

que l'on obtient en divisant ses deux membres par $x-1$; mais

cette substitution n'est légitime que si x est différent de 1. La première équation est en effet satisfaite pour $x=1$, et la seconde ne l'est pas.

44. Pour qu'on puisse substituer deux équations l'une à l'autre, il faut que chacune entraîne l'autre.

Par exemple, l'équation

$$A^2 = B^2$$

ne peut pas être remplacée par

$$A = B,$$

quoiqu'elle en soit une conséquence : car les deux carrés A^2 et B^2 pourraient être égaux, sans que A et B le fussent. Il suffirait (**23**) pour cela, d'après nos conventions, que l'on eût $A = -B$.

Équations du premier degré.

45. Lorsque les inconnues n'entrent qu'à la première puissance, ne figurent dans aucun dénominateur ou sous aucun radical et ne se multiplient pas entre elles, on dit que l'équation est du premier degré.

La forme la plus générale d'une équation du premier degré à une inconnue, est

$$a + bx = a' + b'x; \qquad [1]$$

x désignant l'inconnue, et a, b, a', b' des nombres donnés. En effet, l'équation proposée, si elle est du premier degré par rapport à x, ne contient, dans chaque membre, que des termes connus que l'on peut réunir en un seul, et des termes du premier degré en x, dont la somme est évidemment de la forme bx, $b'x$. Si l'on voulait, par exemple, que l'équation [1] représentât,

$$5 - 3x = 4x - 2,$$

il suffirait d'y supposer $a = 5$, $b = -3$, $a' = -2$, $b' = 4$.

Résolution de l'équation du premier degré à une inconnue.

46. Reprenons l'équation générale

$$a + bx = a' + b'x.$$

Digitized by Google

Elle devient, en faisant passer (42) le terme a dans le second membre, et $b'x$ dans le premier,

$$bx - b'x = a' - a,$$

ou

$$(b - b')x = a' - a,$$

ce qui équivaut, évidemment, à

$$x = \frac{a' - a}{b - b'}.$$

Cette formule représente un nombre, positif ou négatif, qui, substitué dans l'équation [1] et traité d'après les règles convenues, rendra le premier membre égal au second.

Exemple. Soit l'équation

$$5 + 7x = 2x + 9,$$

la formule précédente donne

$$x = \frac{9 - 5}{7 - 2} = \frac{4}{5}.$$

Soit encore $$4 + 3x = 7 + 6x,$$

on trouvera $$x = \frac{7 - 4}{3 - 6} = -1.$$

On vérifie en effet que les valeurs $x = \frac{4}{5}$ et $x = -1$ satisfont aux équations proposées.

Équations qui se ramènent au premier degré.

47. Une équation qui n'est pas du premier degré, peut, dans certains cas, le devenir par quelques transformations. Nous en donnerons des exemples.

1° Soit l'équation * $\sqrt{4 + x} = 4 - \sqrt{x}$,

si nous élevons les deux membres au carré, il vient

$$4 + x = 16 - 8\sqrt{x} + x,$$

* Dans cette équation, $\sqrt{4+x}$ et $\sqrt{x}$, désignent des nombres *positifs*, nous laissons de côté, pour le moment, la double valeur qu'on peut leur attribuer.

Digitized by Google

ou, en faisant passer des termes d'un membre dans l'autre, et supprimant ceux qui se détruisent,

$$8\sqrt{x}=12,$$

et en élevant au carré les deux membres,

$$64x=144$$
$$x=\frac{144}{64}=\frac{9}{4}.$$

Remarque. Le calcul précédent prouve seulement que la seule valeur de x qui puisse satisfaire à l'équation proposée est $x=\frac{9}{4}$; mais pour être certain que cette valeur satisfait effectivement, il faut le vérifier par une substitution directe. Remarquons, en effet, que l'équation

$$4+x=16-8\sqrt{x}+x$$

est bien une conséquence de la proposée et doit être satisfaite par les mêmes valeurs de x; mais elle pourrait l'être sans que la première le fût, si l'on avait

$$\sqrt{4+x}=-(4-\sqrt{x}),$$

car deux nombres égaux et de signes contraires ont même carré. En substituant à x sa valeur $\frac{9}{4}$, on a

$$\sqrt{4+x}=\sqrt{4+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2},$$
$$\sqrt{x}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2};$$

or, on a évidemment

$$\frac{5}{2}=4-\frac{3}{2}.$$

La vérification réussit donc, mais elle était indispensable.

2° Soit encore

$$\frac{a}{1+2x}+\frac{a}{1-2x}=2b.$$

Multiplions les deux membres par le produit $(1+2x)(1-2x)$ ou $1-4x^2$: il vient

$$a(1-2x)+a(1+2x)=2b(1-4x^2),$$

Digitized by Google

ou, en effectuant les multiplications et supprimant les termes qui se détruisent

$$2a = 2b - 8bx^2,$$

équation qui est du premier degré si l'on considère x^2 comme une inconnue; elle donne

$$x^2 = \frac{2b - 2a}{8b} = \frac{b-a}{4b}.$$

Solution de quelques problèmes.

48. Nous donnerons, dès à présent, quelques exemples de l'utilité des équations dans la solution des problèmes.

PROBLÈME I. *Trouver l'escompte d'un billet de* 1500^f *payable dans cinq mois, le taux de l'intérêt étant* 4 *pour* 100.

Désignons par x l'escompte, c'est-à-dire la retenue qu'on doit faire subir au billet. On remettra au porteur $1500 - x$, et il faut que cette somme, si on la place pendant cinq mois, produise un intérêt égal à x; or l'intérêt de 100^f en un an étant 4^f, sera, en cinq mois, $4 \times \frac{5}{12}$ ou $\frac{5}{3}$ de francs. L'intérêt de 1^f pendant le même temps, est donc $\frac{5}{300}$, et celui de $1500 - x$ est,

$$\frac{5}{300}(1500 - x),$$

et l'on doit avoir

$$\frac{5}{300}(1500 - x) = x,$$

ou, en chassant le dénominateur 300

$$5 \times 1500 - 5x = 300x,$$

équation du premier degré, d'où l'on tire,

$$x = \frac{5 \times 1500}{305}.$$

PROBLÈME II. *On a deux lingots d'argent, aux titres de* 0,775 *et* 0,940; *quel poids doit-on prendre de chacun d'eux pour former* 25^{gr} *d'alliage au titre de* 0,900?

Digitized by Google

Soit x le nombre de grammes que l'on doit prendre dans le premier lingot et par conséquent $25-x$ ce que l'on doit prendre dans le second.

Le poids de l'argent contenu dans x grammes du premier lingot est $x \times 0{,}775$.

La quantité d'argent contenue dans $25-x$ grammes du second lingot est $(25-x)\times 0{,}940$.

La quantité totale d'argent contenue dans l'alliage est donc

$$x \times 0{,}775 + (25-x)0{,}940.$$

Puisque le titre de l'alliage est $0{,}900$, la quantité totale d'argent qu'il contient dans 25^{gr} doit être égale à $25\times 0{,}900$, et l'on doit avoir, par suite,

$$x \times 0{,}775 + (25-x)\,0{,}940 = 25 \times 0{,}900,$$

équation du premier degré, dont on déduira la valeur de x.

PROBLÈME III. *Paris et Rouen sont distants de* 137 *kilomètres. Le charbon coûte à Paris* 4 *fr.* 25 *les cent kilogrammes, et à Rouen* 4 *fr.* 75; *les frais de transport étant, par tonne et par kilomètre, de* $0^f{,}09$, *quel est le point du chemin pour lequel il y a avantage égal à faire venir le charbon de l'une ou l'autre ville?*

Soit x la distance du point cherché à Paris, et, par conséquent, $137-x$ la distance à Rouen.

Une tonne de charbon achetée à Paris coûte $42^{fr}{,}50$.

Les frais de transport à la distance x, sont $x \times 0{,}09$.

Le prix de revient d'une tonne achetée à Paris est donc

$$42{,}50 + x \times 0{,}09.$$

Une tonne achetée à Rouen et transportée à la distance $137-x$ coûtera de même

$$47{,}50 + (137-x)0{,}09$$

on aura donc l'équation

$$42{,}50 + x \times 0{,}09 = 47{,}50 + (137-x)0{,}09,$$

d'où l'on tirera facilement la valeur de x.

Digitized by Google

Remarque sur la mise en équation des problèmes.

49. Mettre un problème en équation, c'est exprimer, par une ou plusieurs équations, les conditions imposées par son énoncé. Il est impossible de donner, pour y arriver, une règle complétement générale. Nous nous bornerons à l'indication suivante.

En examinant, avec soin, l'énoncé d'un problème, on verra presque toujours, qu'il s'agit de rendre certaines quantités égales entre elles. Après avoir reconnu quelles sont ces quantités, on cherchera les formules qui en expriment la valeur, et en égalant ces formules, on obtiendra les équations demandées. Reprenons, par exemple, les trois problèmes traités plus haut.

Problème I. Trouver l'escompte de 1500 fr. payables dans cinq mois. C'est trouver une somme qui, placée pendant cinq mois et ajoutée à ses intérêts pendant ce temps, devienne *égale* à 1500 fr.

Problème II. Allier de l'argent à 0,775 avec de l'argent à 0,940 de manière à former 25 grammes d'alliage à 0,900. C'est faire en sorte que la quantité totale d'argent contenue dans les 25 grammes d'alliage soit *égale* à 0,900 $\times$ 25.

Problème III. Il faut faire en sorte que le prix d'une tonne de charbon transportée de Paris au point cherché soit *égal* au prix d'un tonne transportée de Rouen au même point.

Remarque Dans presque tous les problèmes relatifs à des nombres, la mise en équation n'est, pour ainsi dire, que la traduction de l'énoncé français, dans la langue algébrique. Il peut arriver que l'énoncé ne paraisse pas pouvoir immédiatement se traduire en *formule*, mais en s'attachant au sens plutôt qu'aux paroles, on ne trouvera presque jamais de difficulté. Le lecteur pourra s'exercer sur les problèmes indiqués plus loin.

RÉSUMÉ.

40. Ce que l'on nomme identité. — 41. Définition du mot équation; membres d'une équation; inconnue ou inconnues dans une ou plusieurs équa-

Digitized by Google

tions; ce que c'est que résoudre une ou plusieurs équations. — **42**. On peut ajouter un même nombre, positif ou négatif, aux deux termes d'une équation sans altérer les conditions qu'elle impose aux inconnues. On ne dit rien de plus en disant que l'on peut retrancher un même nombre des deux termes d'une équation. Ce que c'est que faire passer un terme d'un membre dans l'autre. — **43**. On peut multiplier les deux membres d'une équation par un même nombre sans altérer les conditions qu'elle impose aux inconnues. Il est essentiel que ce nombre ne soit pas nul. On peut d'après cela chasser les dénominateurs d'une équation. On peut diviser les deux membres d'une équation par un nombre m; cela revient à les multiplier par $\frac{1}{m}$; il est essentiel que m ne soit pas nul. — **44**. Pour que deux équations puissent être substituées l'une à l'autre, il faut que chacune d'elles entraîne l'autre; par exemple, on ne peut pas remplacer $A = B$ par $A^2 = B^2$, qui en est une conséquence, parce que l'on pourrait avoir $A^2 = B^2$ sans que A fût égal à B. — **45**. Définition de l'équation du premier degré. — **46**. Résolution de l'équation du premier degré à une inconnue. — **47**. Exemples d'équations qui n'étant pas du premier degré arrivent à l'être par quelques transformations, soit en élevant les deux membres au carré, soit en changeant d'inconnue, il faut remarquer que lorsqu'on a élevé les deux membres au carré le résultat a besoin d'être vérifié. — **48**. Solution de quelques problèmes. — **49**. Remarque sur la mise en équation des problèmes.

EXERCICES.

I. Deux vases de capacités v et v' contiennent chacun un mélange d'eau et de vin, dans le rapport de m à n pour le premier, de m' à n' pour le second. Quelle capacité doit-on donner à deux autres vases égaux entre eux pour que, les remplissant à la fois, l'un dans v, l'autre dans v', et versant dans chacun d'eux ce qui a été pris dans l'autre, la proportion de l'eau au vin devienne la même dans les deux vases? Montrer *à priori* que le résultat doit être indépendant de m, n, m' et n'.

II. En adoptant les règles indiquées chapitre I, exercice VII, pour la fixation du prix des eaux-de-vie, trouver combien on doit mélanger d'eau-de-vie à a^f le litre avec de l'eau-de-vie à b^f pour former 1 litre d'eau-de-vie à c^f.

III. Les aiguilles des heures, des minutes et des secondes

Digitized by Google

sont sur le chiffre 12 du cadran : après combien de temps l'aiguille des secondes divisera-t-elle en deux parties égales l'angle formé par les deux autres ?

IV. Trois mobiles parcourent une même ligne droite, d'un mouvement uniforme, avec des vitesses v, v' et v'' ; ils sont actuellement à des distances a, a', a'' d'un point O de cette droite dont ils s'éloignent tous les trois ; après combien de temps le premier sera-t-il aux trois cinquièmes de la distance qui sépare les deux autres ?

V. Deux personnes A et B ont fait un pari de 12$^{\text{fr}}$; si A gagne, il sera trois fois aussi riche que B ; s'il perd, il ne sera que deux fois aussi riche. Quelles sont leurs fortunes actuelles ?

VI. Un rectangle dont la largeur est égale à deux fois la hauteur est tel que si chaque côté est augmenté d'un mètre, sa surface est augmentée de neuf mètres carrés. Quels sont ses côtés ?

VII. Trouver trois termes d'une progression qui surpassent également les nombres 3, 5 et 8.

VIII. Un parallélipipède rectangle étant donné, déterminer le côté d'un cube tel que les surfaces des deux solides soient dans le même rapport que leurs volumes.

IX. Trouver une proportion dont les quatre termes surpassent également quatre nombres donnés a, b, c, d.

X. Résoudre $\sqrt{1+\sqrt{x^4-x^2}}=x-1$.

XI. Résoudre $\sqrt{a+x}-\sqrt{\dfrac{a}{a+x}}=\sqrt{2a+x}$.

XII. Résoudre $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\sqrt{b}$.

XIII. Résoudre $\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{b}$.

XIV. Résoudre $(2+x)^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}=4(2+x)^{-\frac{1}{2}}$.

XV. Résoudre

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{a}=\sqrt{\frac{1}{a^2}+\sqrt{\frac{1}{a^2x^2}+\frac{1}{x^4}}}.$$

Digitized by

XVI. Résoudre

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}.$$

XVII. Résoudre $x=\sqrt{x^2-\sqrt{a^2+x^2}}-a.$

XVIII. Résoudre

$$2x+2\sqrt{a^2+x^2}=\frac{5a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

XIX. Résoudre $\frac{(a+x)^{\frac{1}{n}}}{a}+\frac{(a+x)^{\frac{1}{n}}}{x}=\frac{x^{\frac{1}{n}}}{c}.$

XX. n pierres sont rangées en ligne droite à dix mètres de distance les unes des autres, déterminer sur cette droite, la position d'un point X, tel qu'il y ait deux fois plus de chemin à faire pour transporter successivement chaque pierre au point X que pour les transporter à la place occupée par la première d'entre elles. On supposera, dans les deux cas, que l'on parte de cette première pierre.

XXI. Il faut un nombre d'hommes égal à a ou un nombre de femmes égal à b pour faire en n jours un ouvrage représenté par m; combien faut-il adjoindre de femmes à $a-p$ hommes pour faire, en $n-p$ jours, un ouvrage représenté par $m+p$?

Digitized by Google

CHAPITRE V.

RÉSOLUTION D'UN NOMBRE QUELCONQUE D'ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ ENTRE UN NOMBRE ÉGAL D'INCONNUES.

---

50. On peut, en général, déterminer la valeur d'un nombre quelconque d'inconnues, lorsque l'on connaît entre elles un nombre égal d'équations du premier degré. C'est ce que nous allons montrer dans ce chapitre. Mais nous établirons préalablement quelques propositions relatives aux systèmes d'équations.

On entend par système d'équations, l'ensemble de plusieurs équations qui doivent être satisfaites à la fois. Si chaque équation ne contenait qu'une seule inconnue on les résoudrait séparément et il y aurait autant de problèmes distincts que d'équations à résoudre. Mais lorsque les inconnues entrent à la fois dans plusieurs équations, la question devient plus difficile.

51. On dit que deux systèmes d'équations sont équivalents, lorsque les valeurs des inconnues qui satisfont à l'un et à l'autre sont absolument les mêmes; ou, en d'autres termes, lorsque les équations de chacun des systèmes entraînent celles de l'autre.

Lorsque deux systèmes sont équivalents on peut les substituer l'un à l'autre.

52. Théorème I. *Étant donné un système d'équations, on peut substituer, à l'une quelconque d'entre elles l'équation obtenue en ajoutant les équations proposées membre à membre.*

Ainsi, le système d'équations

$$A = A'$$
$$B = B'$$
$$C = C'$$

est équivalent à,

$$A + B + C = A' + B' + C'$$
$$B = B'$$
$$C = C'$$

Il est évident, en effet, que le premier système entraîne le second. Réciproquement, le second entraîne le premier, car si B et C sont respectivement égaux à B' et C', $B+C$ sera égal à $B'+C'$, et $B+C$ augmenté de A ne pourra être égal à $B'+C'$ augmenté de A', que si A est égal à A'.

La démonstration est indépendante du nombre des équations. Il va sans dire que l'on peut appliquer le résultat précédent à une partie seulement des équations qui composent un système, et qu'on a le droit, avant d'ajouter les équations membre à membre, de les multiplier par des nombres quelconques, ce qui (43) n'altère pas les conditions qu'elles imposent aux inconnues.

55. Théorème II. *Lorsque l'une des équations d'un système est résolue par rapport à une inconnue, on peut remplacer cette inconnue par sa valeur dans les autres équations et ramener ainsi le système proposé à un autre, ayant une inconnue et une équation de moins.*

Ainsi le système,

$$x=A$$
$$B=B'$$
$$C=C'$$
$$D=D'$$

où B, B', C, C', D, D' renferment d'une manière quelconque les quantités inconnues, et A peut renfermer toutes les inconnues excepté x, est équivalent à un autre, composé de l'équation $x=A$, et de trois autres obtenues en remplaçant x par la valeur A, dans $B=B'$, $C=C'$, $D=D'$. L'équation $x=A$ faisant, en effet, partie des deux systèmes, quel que soit celui des deux qui soit satisfait, on pourra remplacer, dans les équations restantes, x par A ou A par x et passer par là du premier système au second ou revenir du second au premier, en sorte que chacun des deux systèmes entraîne l'autre et qu'ils sont équivalents.

Remarque. Lorsque, dans les équations $B=B'$, $C=C'$, $D=D'$, on substitue à x sa valeur A, cette inconnue disparaît des équations. On dit alors qu'elle est *éliminée*; en général, *éliminer* une quantité entre deux ou plusieurs équations, c'est combiner

Digitized by Google

ces équations de telle manière que la quantité considérée disparaisse du résultat.

Résolution de deux équations du premier degré à deux inconnues.

54. Si x et y désignent les deux inconnues, les équations ne doivent contenir que trois sortes de termes :

Des termes de premier degré en x,
Des termes de premier degré en y,
Des termes tout connus.

On peut faire passer, dans le premier membre, tous les termes en x et y et réunir, par l'addition des coefficients, ceux qui contiennent la même inconnue. Si l'on fait de même passer dans le second membre tous les termes connus et qu'on les réunisse en un seul, ces équations prendront ainsi la forme

$$[1] \qquad ax + by = c$$
$$[2] \qquad a'x + b'y = c'$$

a, b, a', b', c, c', désignant des nombres connus. On peut remplacer l'équation [1] par

$$x = \frac{c - by}{a},$$

et le système devient

$$[3] \qquad x = \frac{c - by}{a},$$
$$[2] \qquad a'x + b'y = c'$$

mais, sous cette forme, on voit (53) qu'il équivaut au suivant :

$$[3] \qquad x = \frac{c - by}{a}.$$
$$[4] \qquad a'\left(\frac{c - by}{a}\right) + b'y = c'.$$

La seconde de ces deux équations ne renferme qu'une inconnue y, par rapport à laquelle on peut la résoudre, et y une fois déterminé, la première fera connaître la valeur de x.

Si l'on multiplie les deux membres de l'équation [4] par a, elle devient

$$a'(c - by) + ab'y = c'a,$$

Digitized by Google

ou $$(ab'-a'b)y=c'a-a'c,$$

ou encore

[5] $$y=\frac{c'a-a'c}{ab'-a'b}.$$

Par la substitution de cette valeur de y, l'équation [3] devient

$$x=\frac{c-b\dfrac{c'a-a'c}{ab'-a'b}}{a}=\frac{cab'-ca'b-bc'a+ba'c}{a(ab'-a'b)},$$

ou

[6] $$x=\frac{cab'-bc'a}{a(ab'-a'b)}=\frac{cb'-c'b}{ab'-a'b}.$$

Les formules [5] et [6] faisant connaître les valeurs de x et de y, les équations proposées sont résolues.

55. Remarque I. Les équations

$$ax+by=c$$
$$a'x+b'y=c'$$

ont pour solutions

$$x=\frac{cb'-c'b}{ab'-ba'},$$

$$y=\frac{c'a-a'c}{ab'-ba'}.$$

On retiendra facilement ces formules à l'aide des remarques suivantes :

Les valeurs des deux inconnues ont pour dénominateur commun $ab'-ba'$.

Pour former le numérateur de la valeur de chaque inconnue, il faut remplacer, dans l'expression $ab'-ba'$, les coefficients, qui dans les équations multiplient cette inconnue, par le terme tout connu de l'équation correspondante (a et a' par c et c' pour la valeur de x, b et b' par c et c' pour celle de y).

Remarque II. Les formules précédentes fournissent, en général, pour chaque inconnue une valeur unique et déterminée. Dans des cas particuliers qui seront indiqués plus tard, ces formules peuvent devenir illusoires. Les solutions cessent alors d'exister ou deviennent indéterminées.

Digitized by Google

56. Il existe d'autres méthodes fréquemment employées pour la résolution de deux équations à deux inconnues ; quoiqu'elles ne diffèrent pas essentiellement de celle qui a été développée plus haut, nous ne croyons pas pouvoir nous dispenser de les indiquer.

1° Soient les équations

$$[1] \qquad \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' ; \end{cases}$$

si on multiplie les deux membres de la première équation par a' et les deux membres de la seconde par $-a$, elles deviennent

$$[2] \qquad \begin{cases} aa'x + ba'y = ca' \\ -aa'x - b'ay = -c'a ; \end{cases}$$

si on les ajoute membre à membre, on obtiendra l'équation

$$[3] \qquad (ba' - b'a)y = ca' - c'a ,$$

qui peut (52) être substituée à l'une d'elles et donne

$$y = \frac{ca' - c'a}{ba' - b'a} ;$$

y étant connue, l'une des équations proposées fera connaître x. On peut aussi chercher directement la valeur de cette inconnue en éliminant y comme nous avons éliminé x.

On voit que le succès de la méthode résulte de ce que l'on a obtenu les équations [2] dans lesquelles l'inconnue x a des coefficients égaux et de signe contraire, ce qui permet de l'éliminer par *addition*. Il a suffi pour cela de multiplier les deux membres des équations proposées par les facteurs a' et $-a$; dans certains cas, on peut adopter un multiplicateur plus simple. Supposons en effet que les coefficients de x aient un multiple commun μ et que les équations proposées soient

$$\begin{aligned} A\mu x + By &= C \\ A'\mu x + B'y &= C' ; \end{aligned}$$

si on multiplie la première équation par A' et la seconde par $-A$, elles deviendront

$$\begin{aligned} A'A\mu x + BA'y &= CA' \\ -AA'\mu x - B'Ay &= -C'A , \end{aligned}$$

et il suffira de les ajouter pour éliminer x.

2° On peut encore résoudre le système

$$[1] \qquad \begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned}$$

de la manière suivante : on déduit des équations proposées

$$[2] \qquad x = \frac{c - by}{a}$$

$$x = \frac{c' - b'y}{a'},$$

et en égalant les valeurs de x

$$\frac{c - by}{a} = \frac{c' - b'y}{a'},$$

équation à une inconnue qui fera connaître y. y étant connu, l'une ou l'autre des équations [2] permet de déterminer x.

Résolution d'un nombre quelconque d'équations du premier degré.

57. Pour résoudre un nombre quelconque d'équations du premier degré entre un nombre égal d'inconnues, on peut déduire de l'une d'elles la valeur d'une inconnue, et la substituer (53) dans toutes les autres qui contiendront alors une inconnue de moins. La résolution de n équations à n inconnues se ramènera ainsi à celle de $(n-1)$ équations à $n-1$ inconnues; celles-ci se ramèneraient de même à un système de $n-2$ équations à $n-2$ inconnues, et en continuant ainsi, on sera conduit à une équation ne contenant qu'une inconnue.

Le procédé que nous venons d'indiquer est assez simple pour que, sur cette seule indication, on puisse facilement en faire usage.

58. On résout aussi les équations du premier degré par une autre méthode dont l'emploi est souvent plus commode.

Soient n équations de premier degré à n inconnues,

$$[1] \qquad \begin{aligned} ax + by + cz + \ldots &= k_1 \\ a_1, x + b_1y + c_1z + \ldots &= k_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1}x + b_{n-1}y + c_{n-1}z + \ldots &= k_{n-1}. \end{aligned}$$

Ajoutons ces équations après les avoir multipliées, à l'exception de la première, par des nombres indéterminés $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-1}$, il viendra

$$[2] \quad x(a+a_1\lambda_1+\ldots a_{n-1}\lambda_{n-1})+y(b+b_1\lambda_1+\ldots b_{n-1}\lambda_{n-1}) \\ +z(c+c_1\lambda_1+\ldots c_{n-1}\lambda_{n-1})+\ldots=k+k_1\lambda_1+\ldots k_{n-1}\lambda_{n-1};$$

et cette nouvelle équation peut (52) remplacer une des proposées, quels que soient les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-1}$; or nous pouvons déterminer ces nombres de manière que les équations

$$[3] \quad \begin{cases} b+b_1\lambda_1+\ldots b_{n-1}\lambda_{n-1}=0, \\ c+c_1\lambda_1+\ldots c_{n-1}\lambda_{n-1}=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

soient satisfaites, et il suffira pour cela de résoudre $n-1$ équations à $n-1$ inconnues. Mais alors l'équation [2] ne contiendra que la seule inconnue x et permettra d'en déterminer la valeur; x étant connu, le système ne contiendra plus que $n-1$ inconnues.

La méthode que nous venons d'indiquer permet, comme on voit, de résoudre n équations à n inconnues, pourvu que l'on sache résoudre un système contenant une inconnue de moins.

Comme nous savons résoudre deux équations à deux inconnues, nous pouvons d'après cela, résoudre un système de trois équations à trois inconnues; partant, un système de quatre équations à quatre inconnues, et ainsi de suite. On obtiendra, quel que soit le nombre des équations proposées, une formule fournissant la valeur de chaque inconnue exprimée au moyen des coefficients. Dans certains cas, ces formules pourront être illusoires, les équations seront alors impossibles ou indéterminées, mais nous n'entamerons pas ici cette discussion.

59. On peut encore résoudre le système proposé en procédant pour chaque inconnue, comme on l'a fait pour x, et les obtenir ainsi sans les rattacher les unes aux autres. Comme le raisonnement précédent prouve qu'il existe un système de valeurs qui satisfont, les solutions trouvées de cette manière et qui évidemment sont les seules possibles, satisfont effectivement.

Digitized by Google

60. Application. Soit à résoudre le système

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= k, \\ a'x + b'y + c'z &= k', \\ a''x + b''y + c''z &= k''. \end{aligned}$$

Ajoutons ces trois équations après avoir multiplié la seconde et la troisième par des indéterminées λ' et λ''; il viendra

$$x(a + a'\lambda' + a''\lambda'') + y(b + b'\lambda' + b''\lambda'') + z(c + c'\lambda' + c''\lambda'') = k + k'\lambda' + k''\lambda''.$$

Si nous posons

$$[1] \qquad \begin{aligned} b + b'\lambda' + b''\lambda'' &= 0, \\ c + c'\lambda' + c''\lambda'' &= 0; \end{aligned}$$

il viendra
$$x = \frac{k + k'\lambda' + k''\lambda''}{a + a'\lambda' + a''\lambda''}.$$

Mais les deux équations à deux inconnues (54) fournissent

$$\lambda' = \frac{b''c - bc''}{b'c'' - b''c'}, \qquad \lambda'' = \frac{c'b - bc'}{b'c'' - c'b''},$$

et en remplaçant et multipliant les deux termes de la fraction par $b'c'' - b''c'$, il vient

$$x = \frac{kb'c'' - kc'b'' + ck'b'' - bk'c'' + bc'k'' - cb'k''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}.$$

On trouvera de même

$$y = \frac{ak'c'' - ac'k'' + ca'k'' - ka'c'' + kc'a'' + ck'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''},$$

et
$$z = \frac{ab'k'' - ac'k'' + ca'k'' - ba'k'' + bk'a'' - kb'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}.$$

Il existe, pour le cas d'un nombre quelconque d'équations, des formules analogues dont nous ne rapporterons ni la démonstration générale ni la discussion.

RÉSUMÉ.

50. Ce que l'on entend par un système d'équations. — **51.** Systèmes équivalents. — **52.** On peut substituer à l'une des équations d'un système celle que l'on obtient en ajoutant les proposées membre à membre. — **53.** Lorsque l'une des équations d'un système est résolue par rapport à une

Digitized by Google

inconnue, on peut remplacer dans toutes les autres cette inconnue par sa valeur. — 54. Résolution de deux équations du premier degré à deux inconnues. — 55. Moyen mnémonique de retenir les formules de résolution. Il existe des cas particuliers dans lesquels les formules deviennent illusoires, on s'en occupera plus tard. — 56. Autres méthodes pour la résolution de deux équations à deux inconnues. — 57. Résolution d'un nombre quelconque d'équations entre un nombre égal d'inconnues; on ramène le système à un autre qui contient une inconnue de moins. — 58. Autre méthode dite des multiplicateurs; elle fournit la valeur d'une inconnue; les autres dépendent d'un nombre moindre d'équations. — 59. La méthode des multiplicateurs permet d'obtenir directement chaque inconnue sans avoir besoin de calculer aucune des autres. — 60. Application de la méthode des multiplicateurs aux équations à trois inconnues.

EXERCICES.

I. Trouver deux nombres qui soient dans le rapport de 2 à 3 et tels qu'en y ajoutant 4, les sommes soient comme 4 à 5.

II. Trouver deux nombres qui soient dans le rapport de 3 à 4 et dont le produit égale 12 fois la somme.

III. Trouver deux nombres dont la différence, la somme et le produit soient comme les nombres 2, 3 et 5.

IV. Trouver trois nombres en progression arithmétique tels que le 1er soit au 3e :: 5 : 9 et que la somme des trois égale 63.

V. Résoudre

$$\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2-b^2}+\frac{z^2}{\rho^2-c^2}=1,$$
$$\frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}+\frac{z^2}{\mu^2-c^2}=1,$$
$$\frac{x^2}{\nu^2}+\frac{y^2}{\nu^2-b^2}+\frac{z^2}{\nu^2-c^2}=1.$$

Déduire de ces équations x, y, z, et $x^2+y^2+z^2$.

VI. On donne la suite

$$a+b,\ aq+bq_1,\ aq^2+bq_1^2,\ aq^3+bq_1^3,\ aq^4+bq_1^4,\ldots$$

Trouver deux nombres x et y, tels que chaque terme de cette suite puisse s'obtenir en multipliant le précédent par x, et l'antéprécédent par y.

Digitized by Google

VII. On donne la suite

$$a+b+c,\quad aq+bq_1+cq_2,\quad aq^2+bq_1^2+cq_2^2,\quad aq^3+bq_1^3+cq_2^3,\ldots$$

Trouver trois nombres x, y, z tels que chaque terme de cette suite s'obtienne en multipliant le précédent par x, l'antéprécédent par y et celui qui précède de trois rangs par z.

VIII. Résoudre

$$\begin{aligned} a^4+a^3x+a^2y+az+u&=0,\\ b^4+b^3x+b^2y+bz+u&=0,\\ c^4+c^3x+c^2y+cz+u&=0,\\ d^4+d^3x+d^2y+dz+u&=0. \end{aligned}$$

IX. Résoudre

$$\begin{aligned} 1&=x+y+z+u+v+w+t,\\ 0&=x+ay+bz+cu+dv+ew+ft,\\ 0&=x+a^2y+b^2z+c^2u+d^2v+e^2w+f^2t,\\ 0&=x+a^3y+b^3z+c^3u+d^3v+e^3w+f^3t,\\ 0&=x+a^4y+b^4z+c^4u+d^4v+e^4w+f^4t,\\ 0&=x+a^5y+b^5z+c^5u+d^5v+e^5w+f^5t,\\ 0&=x+a^6y+b^6z+c^6u+d^6v+e^6w+f^6t. \end{aligned}$$

X. Si l'on considère les équations

$$[1]\qquad \begin{aligned} ax+by&=c,\\ a'x+b'y&=c'; \end{aligned}$$

et que l'on pose

$$[2]\qquad \begin{aligned} x&=\alpha t+\beta u,\\ y&=\alpha' t+\beta' u; \end{aligned}$$

par cette substitution, on obtiendra deux équations entre t et u; vérifier que le dénominateur des valeurs de t et u que l'on en déduit est le produit des dénominateurs que l'on trouve en résolvant les équations [1] par rapport à x et y et [2] par rapport à t et u.

XI. Mêmes questions pour les équations

$$[1]\qquad \begin{aligned} ax+by+cz&=d,\\ a'x+b'y+c'z&=d',\\ a''x+b''y+c''z&=d''; \end{aligned}$$

Digitized by Google

dans lesquelles on pose

$$[2] \qquad \begin{aligned} x &= \alpha t + \beta u + \gamma v, \\ y &= \alpha' t + \beta' u + \gamma' v, \\ z &= \alpha'' t + \beta'' u + \gamma'' t. \end{aligned}$$

XII. Résoudre les équations

$$ax^3 = by^3 = cz^3,$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{d},$$

et calculer $ax^3 + by^3 + cz^2$.

XIII. Éliminer a, b, c entre les équations

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m + \left(\frac{z}{c}\right)^m = 1,$$

$$a^n + b^n + c^n = d^n,$$

$$\frac{x^m}{a^{m+n}} = \frac{y^m}{b^{m+n}} = \frac{z^m}{c^{m+n}}.$$

XIV. Un train dont la vitesse est v part après un autre train dont la vitesse est v', et le retard est calculé de manière qu'ils arrivent au même temps à la destination. Le premier train est obligé de ralentir la vitesse de moitié après avoir fait les deux tiers de la course, et il y a rencontre de trains, a lieues avant la fin du voyage. Trouver la longueur totale du trajet.

XV. Pour faire un certain ouvrage, A emploie m fois plus de temps que B et C réunis; B, n fois plus de temps que A et C; et C, p fois plus de temps que A et B. Trouver une relation entre m, n, p.

XVI. Quelle relation doit-il exister entre a, b et c pour qu'ils soient les termes de rangs p, q et r dans une même progression par différence ou par quotient?

Digitized by Google

CHAPITRE VI.

DISCUSSION DES FORMULES TROUVÉES DANS LES DEUX CHAPITRES PRÉCÉDENTS.

Discussion de la formule de résolution d'une équation du premier degré à une inconnue.

61. Nous avons trouvé (**46**) pour solution de l'équation

[1] $$ax + b = a'x + b',$$

[2] $$x = \frac{b' - b}{a - a'}.$$

Le seul cas que l'on doive examiner à part est celui où $a - a'$ est égal à zéro.

1° Si $a - a'$ est nul sans que $b' - b$ le soit, la formule [2] donne

$$x = \frac{b' - b}{0},$$

ce qui ne signifie rien. Mais il est facile de voir que l'équation proposée est dans ce cas impossible, car elle devient, a' étant égal à a,

$$ax + b = ax + b',$$

ce qui ne peut avoir lieu si b est différent de b'.

2° Supposons maintenant que l'on ait à la fois $a = a'$, $b = b'$; cette formule devient :

$$x = \tfrac{0}{0},$$

ce qui ne signifie rien ; mais il est facile de voir que, dans ce cas, l'équation [1] est satisfaite quel que soit x, car elle devient :

$$ax + b = ax + b.$$

Digitized by Google

62. REMARQUE I. D'après ce qui précède, lorsque la formule de résolution d'une équation à une inconnue donne, pour valeur de cette inconnue, une expression de la forme $\frac{m}{0}$, on doit en conclure que l'équation est impossible, mais il n'en est pas toujours ainsi du problème qui y a conduit, on peut affirmer seulement que la quantité prise pour inconnue cesse alors d'exister. Si, par exemple, on a pris pour inconnue la distance à laquelle se coupent deux droites cherchées, et que l'on trouve une valeur de la forme $\frac{m}{0}$, on conclura que les deux droites ne se coupent pas et sont par conséquent parallèles.

63. REMARQUE II. Lorsque le dénominateur d'une fraction diminue, la fraction augmente et peut augmenter sans limite si le dénominateur diminue indéfiniment. D'après cela, on dit quelquefois que le dénominateur devenant nul, la fraction devient *infinie*, et on écrit qu'elle a pour solution $x=\infty$. C'est là une locution incorrecte, la fraction dont le dénominateur est nul ne représente rien. Si les données d'un problème varient de telle manière que le dénominateur de la valeur de l'inconnue tende vers zéro, l'inconnue elle-même augmente indéfiniment, mais lorsque le dénominateur est actuellement nul, la solution n'existe pas et l'équation est impossible.

Discussion des formules de résolution de deux équations à deux inconnues.

64. Les formules trouvées pour la résolution de deux équations du premier degré

[1] $$ax+by=c,$$

[2] $$a'x+b'y=c'$$

fournissent, en général, pour chacune des inconnues x et y une seule valeur positive ou négative; mais dans certains cas que nous allons examiner, ces valeurs deviennent illusoires.

Digitized by Google

Les formules de résolution sont

[3] $$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'},$$

[4] $$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

Si $ab' - ba'$ n'est pas nul, elles ne donnent lieu à aucune difficulté, nous examinerons donc seulement le cas où l'on a

$$ab' - ba' = 0,$$

et nous le diviserons en deux autres.

65. 1° Supposons que $ab' - ba'$ soit nul sans que les numérateurs des formules [3] et [4] le soient. Les valeurs de x et y prennent alors la forme $\frac{m}{0}$, $\frac{n}{0}$, ce qui ne signifie rien; mais il est facile de voir que, dans ce cas, les équations proposées sont incompatibles; puisque l'on a, en effet,

$$ab' = ba',$$

ou

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'};$$

en désignant par r la valeur commune de ces deux rapports, on a :

$$a = ra',$$
$$b = rb';$$

par suite, les équations proposées deviennent

$$ra'x + rb'y = c,$$
$$a'x + b'y = c'.$$

Or, le premier membre de la première étant égal au produit de r par le premier membre de la seconde, les mêmes relations doivent exister entre les seconds membres, et il y a, par suite, impossibilité si l'on n'a pas,

$$c = rc',$$

c'est-à-dire, en remplaçant r par ses deux valeurs $\frac{a}{a'}$ et $\frac{b}{b'}$, si l'on n'a pas,

$$c = \frac{ac'}{a'}, \quad c = \frac{bc'}{b'},$$

Digitized by Google

ou, ce qui revient au même,

$$ac' = ca', \quad b'c = bc'.$$

Mais ces dernières égalités expriment, contrairement à nos suppositions, que les numérateurs des valeurs de x et de y sont égaux à zéro, elles ne sont donc pas satisfaites, et les équations proposées sont incompatibles.

66. 2° Si le numérateur de l'une des valeurs de x et y s'annule en même temps que $ab' - ba'$, il en est de même de l'autre numérateur.

Si l'on a en effet $\quad ab' - ba' = 0,$

$$ac' - ca' = 0,$$

ces équations, qui peuvent se mettre sous la forme,

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'},$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'},$$

entraînent évidemment $\quad \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'},$

c'est-à-dire $\quad bc' = b'c.$

Supposons ces relations satisfaites, les valeurs des deux inconnues se présenteront sous la forme $\frac{0}{0}$. Désignons par r la valeur commune des trois rapports $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$, $\frac{c}{c'}$, on aura

$$a = ra', \quad b = rb', \quad c = rc',$$

et les équations proposées peuvent être écrites ainsi :

$$ax + by \quad = c,$$
$$rax + rby = rc.$$

La seconde n'étant autre chose que la première, dont les deux membres sont multipliés par r, on n'a réellement, qu'une seule équation entre les deux inconnues x et y, et l'on peut par conséquent choisir l'une d'elles arbitrairement, et déterminer l'autre en résolvant une équation à une inconnue.

Digitized by

67. En résumé, quand les formules de résolution donnent pour les inconnues des expressions de la forme $\frac{m}{0}$, les équations sont incompatibles, et quand elles en donnent de la forme $\frac{0}{0}$ les équations rentrent l'une dans l'autre (**64**).

La remarque faite (**63**) s'applique aux équations à deux inconnues. Lorsque les valeurs des inconnues se présentent sous la forme $\frac{m}{0}$, les équations sont impossibles, mais il n'en est pas toujours de même du problème qui leur a donné naissance.

68. En mettant plus haut (**66**) les équations

$$ab' = ba',$$
$$ac' = ca',$$

sous la forme
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}, \quad \frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}.$$

Nous avons supposé, tacitement, que les nombres a', b', c' étaient différents de 0. Nous laissons au lecteur le soin de discuter le cas où cela n'a pas lieu, et de reconnaître que des expressions de la forme $\frac{m}{0}$ et $\frac{0}{0}$ indiquent encore l'impossibilité ou l'indétermination. Nous nous bornerons à indiquer un cas particulier remarquable. Si l'on a $a = 0$, $a' = 0$, les formules

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}$$
$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'},$$

deviennent
$$x = \frac{cb' - bc'}{0}.$$
$$y = \frac{0}{0},$$

C'est une exception au résultat démontré (**66**) : toutes les fois que l'une des inconnues se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, il en est de même de la seconde. Du reste, dans le cas dont nous parlons, a et a' étant nuls, les deux équations deviennent

$$by = c,$$
$$b'y = c',$$

ce sont deux équations à *une inconnue* et non deux équations à deux inconnues.

RÉSUMÉ.

61. Le seul cas que l'on doive examiner à part dans la formule de résolution d'une équation de premier degré à une inconnue est celui où le dénominateur est nul. Si le numérateur n'est pas nul en même temps, l'équation est impossible. Si le numérateur est nul, elle est identique et la valeur de l'inconnue qui se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ est indéterminée. — 62. Quand l'équation est impossible, il n'en est pas toujours de même du problème qui y a conduit. — 63. Quand la valeur d'une inconnue prend la forme $\frac{m}{0}$ on dit souvent que cette valeur est infinie; c'est là une locution incorrecte. — 64. Les formules de résolution de deux équations à deux inconnues ne donnent lieu à aucune difficulté tant que le dénominateur commun de la valeur des inconnues n'est pas égal à zéro. — 65. Si ce dénominateur est nul sans que les numérateurs le soient, les équations proposées sont incompatibles. — 66. Si l'expression de l'une des inconnues a son numérateur et son dénominateur égaux à zéro, il en est de même de l'expression de l'autre inconnue. Lorsque cela a lieu, les valeurs des deux inconnues se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$, et les équations proposées rentrent l'une dans l'autre. — 67. Lorsque les valeurs des inconnues se présentent sous la forme $\frac{m}{0}$ les équations sont incompatibles, mais il n'en est pas toujours de même du problème qui leur a donné naissance. — 68. Cas d'exception dans lequel l'une des inconnues se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ sans que l'autre prenne la même forme; on doit remarquer que, dans ce cas, les équations proposées sont réellement deux équations à une inconnue et non deux équations à deux inconnues.

EXERCICES.

I. Quelles relations doit-il exister entre A, B, A′, B′, pour que

$$\frac{Ax + B}{A'x + B'}$$

ait une valeur indépendante de x?

II. Quelles relations doit-il exister entre A, B, C, A′, B′, C′, pour que l'expression

$$\frac{Ax + By + C}{A'x + B'y + C'}$$

soit indépendante de x et de y? peut-elle être indépendante de x sans l'être de y?

III. Trouver une progression par différence dans laquelle il existe un rapport constant entre la somme des x premiers termes et la somme des kx suivants, k étant donné, et x pouvant prendre toutes les valeurs entières.

IV. Discuter les formules de résolution de trois équations à trois inconnues, et distinguer les cas suivants :

Deux d'entre elles peuvent être incompatibles, quelle que soit la troisième.

L'une d'elles peut être incompatible avec les deux autres.

Deux d'entre elles peuvent rentrer l'une dans l'autre.

L'une d'elles peut rentrer dans les deux autres.

V. Un vase de capacité v est rempli dans un temps t par n robinets, et par la pluie qui tombe sur un toit de surface s. Un vase de capacité v' est rempli dans un t' par n' robinets, et par la pluie qui tombe sur un toit du surface s'; déterminer d'après ces données, ce qu'un robinet verse dans l'unité de temps, et ce que verse la pluie sur chaque unité de surface du toit.

Discuter les cas d'impossibilité et d'indétermination, et les expliquer *à priori*.

Digitized by Google

CHAPITRE VII.

SOLUTIONS NÉGATIVES DES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.

Solutions négatives des équations à une inconnue.

69. Il n'y a aucune remarque à faire sur les nombres négatifs trouvés comme solution d'une ou de plusieurs équations. Ces nombres, substitués aux inconnues et traités conformément aux conventions, rendent le premier membre de l'équation égal au second. Mais lorsque les inconnues représentent des grandeurs à déterminer, il semble que les solutions négatives n'exprimant aucune grandeur, doivent être rejetées et considérées comme un symptôme d'impossibilité. C'est, en effet, ce qui aurait lieu si, dans la mise en équation, on pouvait toujours exprimer d'une manière générale et pour tous les cas, les conditions du problème proposé. Mais bien souvent il n'en est pas ainsi, et les solutions négatives peuvent trouver alors une interprétation qu'il est important d'étudier.

70. Considérons d'abord une seule équation à une inconnue

$$ax + b = a'x + b'.$$

Supposons qu'en la résolvant on ait trouvé pour x une valeur négative $-\alpha$; cela signifie que l'on a

$$a(-\alpha) + b = a'(-\alpha) + b',$$

c'est-à-dire $$b - a\alpha = b' - a'\alpha;$$

et que, par conséquent, $x = +\alpha$ est solution de l'équation

$$b - ax = b' - a'x.$$

Ainsi toute solution négative d'une équation du premier degré à une inconnue, étant prise positivement, satisfait à une équation que l'on obtient en changeant dans la première, le

Digitized by Google

signe des termes où figure l'inconnue. Or, il arrive souvent, comme nous allons le montrer, que cette nouvelle équation correspond à un problème peu différent du proposé, et quelquefois à ce problème lui-même, entendu dans un sens plus général; on obtient alors la solution du problème modifié ou généralisé, en prenant, avec le signe +, la valeur négative trouvée pour l'inconnue. Une pareille remarque ne peut être développée d'une manière générale, il est essentiel d'étudier, à part, son application dans chaque question particulière. C'est ce que nous allons faire dans les problèmes suivants.

71. PROBLÈME I. *Deux mobiles qui suivent une ligne droite, partent de deux points* A *et* B, *situés à une distance* d *l'un de l'autre, et marchent dans le même sens, avec des vitesses* v *et* v'. *Après combien de temps se rencontreront-ils?*

Soit x le temps cherché, le premier mobile dont la vitesse est v, parcourt un espace v dans l'unité de temps, et par suite, dans le temps x il parcourra vx; le second, pendant le même temps, parcourt l'espace $v'x$; or, il faut, pour qu'ils se rencontrent, que le premier ait parcouru un espace d de plus que le second; on doit donc avoir

$$vx - v'x = d,$$

d'où l'on déduit
$$x = \frac{d}{v - v'}.$$

Si v est moindre que v', cette solution est négative; pour l'interpréter, remarquons (**70**) que, prise positivement, elle satisfait à l'équation

$$v'x - vx = d.$$

Or, cette équation exprime que le chemin parcouru par le mobile B surpasse, de d, celui parcouru par le mobile A, condition qui répond évidemment à la question suivante :

En supposant que les deux mobiles soient en marche depuis un temps indéfini, combien y a-t-il de temps qu'ils se sont rencontrés?

Si donc on veut donner cette extension au problème, la valeur négative de x exprime un temps déjà écoulé.

PROBLÈME II. *Les âges de deux individus sont* a *et* b, *après combien de temps l'âge du premier sera-t-il double de celui du second?*

Digitized by Google

Si x est le temps cherché, l'équation du problème est évidemment

$$a+x=2(b+x),$$

et l'on en déduit $$x=a-2b.$$

Si a est moindre que $2b$, cette valeur de x est négative; prise positivement, elle satisfait alors (70) à l'équation

$$a-x=2(b-x)$$

qui correspond évidemment à la question suivante :

Combien y a-t-il de temps que l'âge du premier individu était double de celui du second ?

PROBLÈME III. *On donne sur une droite, deux points* A *et* B, *le premier situé à gauche d'un point* O *à une distance* a, *et le second situé à droite à une distance* b, *déterminer sur cette ligne, un troisième point* X, *tel qu'en prenant le milieu* M *de* BX, *puis le tiers de* AM *à partir de* A, *le point ainsi déterminé coïncide avec* O.

A O X M B.

On a évidemment, en nommant x la distance OX,

$$OM=\frac{b+x}{2}.$$

Il faut que AO ou a soit le tiers de AM, et que, par conséquent,

$$3a=a+\frac{b+x}{2},$$

d'où l'on déduit $$x=4a-b.$$

Si $4a$ est moindre que b, la solution est négative ; prise positivement, elle satisfait donc (70) à l'équation

$$3a=a+\frac{b-x}{2},$$

ce qui est précisément l'équation à laquelle on est conduit, en supposant le point X à une distance x à gauche de O ; la valeur négative de x doit donc, dans ce cas, être portée dans un sens opposé à celui que l'on avait supposé dans la mise en équation.

Digitized by Google

72. Il ne faut pas croire que les solutions négatives s'interprètent toutes, aussi naturellement que les précédentes. On ne doit pas même affirmer d'une manière générale qu'une valeur négative trouvée pour un temps à venir, exprime un temps passé, ni que les longueurs négatives à porter sur une ligne doivent toujours être comptées en sens opposé à celui qui correspond aux valeurs positives. Il en est cependant ainsi dans la plupart des cas, et nous allons en donner la raison.

73 Supposons que x désignant le temps qui doit s'écouler jusqu'à un certain événement, on ait trouvé pour équation d'un problème,

$$[1] \qquad B + Ax = B' + A'x.$$

Si, au lieu de chercher le temps qui doit s'écouler à partir de l'époque actuelle, on avait cherché le temps qui doit s'écouler à partir d'une époque antérieure de t années (c'est ce qui aurait lieu, par exemple, si l'on prenait pour inconnue la date de l'événement), en nommant x_1 ce temps, on aurait évidemment,

$$x_1 = t + x$$
$$x = x_1 - t,$$

et, par suite, au lieu de [1],

$$[2] \qquad B + A(x_1 - t) = B' + A'(x_1 - t),$$

qui serait l'équation du problème, si l'on prenait x_1 pour inconnue. Si la valeur de x_1, que l'on en déduit, est moindre que t et égale, par exemple, à $t - \alpha$, on aura, en la substituant dans [2]

$$B - A\alpha = B' - A'\alpha,$$

par où l'on voit que l'équation [1] a pour solution

$$x = -\alpha.$$

Une solution négative $x = -\alpha$, trouvée pour l'équation [1], signifie donc que l'événement est postérieur de $t - \alpha$ à une époque antérieure de t à l'époque actuelle, c'est-à-dire qu'il précède de α l'époque actuelle.

74. Le raisonnement précédent n'est pas tout à fait général : il suppose que l'équation [2] qui convient à une époque posté-

Digitized by Google

rieure à l'époque actuelle s'applique aussi aux époques antérieures; or cela pourrait ne pas avoir lieu.

75. Supposons maintenant que x désignant la distance à porter sur une ligne, à partir d'un point donné, et dans une certaine direction, à droite par exemple, on ait trouvé, pour équation d'un problème,

$$[1] \qquad B + Ax = B' + A'x.$$

Si au lieu de chercher les distances du point inconnu à l'origine donnée, on avait cherché sa distances x_1 à une origine située à gauche de la première, à une distance d, on aurait eu

$$x_1 = d + x \quad \text{ou} \quad x = x_1 - d,$$

et, par suite, au lieu de l'équation [1],

$$[2] \qquad B + A(x_1 - d) = B' + A'(x_1 - d).$$

Si cette équation fournit pour x_1 une valeur positive moindre que d, que je représente par $d - \alpha$, le point cherché sera évidemment à gauche de O et à une distance α de cette origine; mais en substituant, dans [2], à x_1 sa valeur $d - \alpha$, on a

$$B - A\alpha = B' - A'\alpha,$$

d'où il résulte que l'équation [1] a pour solution $x = -\alpha$. Une solution négative $x = -\alpha$ trouvée pour l'équation [1] signifie donc que le point cherché est situé à gauche de O et à une distance α de cette origine.

76. Nous remarquerons, comme (**74**), que le raisonnement précédent n'est pas tout à fait général, et suppose que l'équation [2], qui correspond aux points situés à droite de O, s'applique aussi aux points situés à gauche; or cela n'a pas toujours lieu, et nous en donnerons un exemple.

PROBLÈME. *Un chemin de fer prend* $0^f,10$ *par tonne et par kilomètre pour le transport des marchandises; on paye, en outre, un droit fixe de* $3^f,75$ *par wagon de* 2000 *kilogrammes : à quelle distance peut-on transporter* 50 *tonnes pour* 3 *fr.?*

50 tonnes correspondent à 25 wagons; le droit fixe à payer est donc de

$$3,75 \times 25;$$

Digitized by Google

et, en outre, pour le transport à la distance x,

$$0,10 \times 50 \times x;$$

l'équation du problème est donc

$$3,75 \times 25 + 0,10 \times 50 \times x = 3;$$

et en la résolvant on trouve pour x une valeur négative qui ne signifie ici absolument rien.

On peut voir, en effet, que dans ce cas, le raisonnement (75) est en défaut. Si, en effet, on suppose que les cinquante tonnes devant être portées vers la droite, on prenne pour inconnue la distance x_1 à un point situé, vers la gauche, à une distance d du point de départ, on aura $x = x_1 - d$, et l'équation du problème deviendra

$$3,75 \times 25 + 0,10 \times 50 \times (x_1 - d) = 3,$$

mais cette équation ne convient nullement au cas du transport effectué vers la gauche; dans ce cas, en effet, le chemin parcouru doit être représenté par $d - x_1$, et il faut prendre, pour équation du problème,

$$3,75 \times 25 + 0,10 \times 50 \times (d - x_1) = 3.$$

Introduction des nombres négatifs dans l'énoncé d'un problème.

77. Il est quelquefois avantageux d'introduire des nombres négatifs dans les données mêmes d'une question. Nous nous bornerons à montrer, par un exemple fort simple, comment on peut y être conduit, et de quelle nature est l'avantage qu'on y trouve.

Reprenons le problème résolu (**71**).

Deux mobiles suivent la droite AA′ *en marchant dans le même sens avec des vitesses* v *et* v′, *l'un est en* A, *l'autre en* A′; *après combien de temps se rencontrent-ils?*

En nommant x le temps inconnu, et d la distance AA′, on a l'équation (**71**)

$$vx - v'x = d.$$

Cette équation fournit la solution du problème, lors même que v est moindre que v', pourvu que l'on regarde (**71**) les

valeurs négatives de x comme représentant un temps déjà écoulé.

Pour généraliser encore davantage, supposons que les deux mobiles ne marchent pas tous deux dans la direction AA′, on peut considérer trois cas distincts :

1° Le mobile A marche vers la droite et le mobile A′ vers la gauche ;

l'équation du problème est alors, comme on le voit facilement,

$$vx + v'x = d;$$

2° A marchant vers la gauche, A′ marche vers la droite.

Les mobiles ne se rencontreront jamais, mais en nommant x le temps écoulé depuis leur rencontre, on aura

$$vx + v'x = d;$$

3° Enfin, si l'on suppose que les mobiles marchent vers la gauche, on aura

$$v'x - vx = d.$$

Les équations relatives aux quatre cas sont donc en résumé

$vx - v'x = d$	quand A et A′ marchent vers la droite,
$vx + v'x = d$	A vers la droite, A′ vers la gauche,
$vx + v'x = d$	A vers la gauche, A′ vers la droite, x désigne un temps déjà écoulé,
$v'x - vx = d$	A et A′ vers la gauche.

Or, ces quatre équations peuvent se réduire à une seule, ce qui est évidemment un avantage, si l'on convient de représenter par des nombres négatifs $-v$, $-v'$ les vitesses dirigées vers la gauche ; d'après cette convention, il faut, en effet, remplacer dans la seconde des équations ci-dessus v' par $-v'$; dans la troisième, v par $-v$; dans la quatrième, v par $-v$, v' par $-v'$; et de plus, dans la troisième, où l'inconnue désigne un temps

déjà écoulé, x par $-x$; les quatre équations deviennent par ces substitutions:

$$vx - v'x = d;$$

en sorte que la formule

$$x = \frac{d}{v - v'},$$

que l'on en déduit, convient à tous les cas.

Solutions négatives des équations à deux inconnues.

78. Nous n'avons considéré jusqu'à présent que les solutions négatives fournies par une équation à une inconnue. Le cas de plusieurs équations donne lieu à des remarques entièrement semblables.

Supposons qu'en résolvant le système

$$[1] \qquad \begin{aligned} ax + by &= c, \\ a'x + b'y &= c', \end{aligned}$$

on ait trouvé, pour l'une des inconnues, ou pour toutes deux, des valeurs négatives. Soient, par exemple, $x = \alpha$, $y = -\beta$. Ces valeurs satisfaisant aux équations [1], on aura

$$\begin{aligned} a\alpha - b\beta &= c, \\ a'\alpha - b'\beta &= c'; \end{aligned}$$

et, par conséquent, les valeurs $x = \alpha$, $y = \beta$, satisfont au système

$$\begin{aligned} ax - by &= c, \\ a'x - b'y &= c'. \end{aligned}$$

Ainsi donc, en prenant positivement la solution négative $y = -\beta$, on satisfait à un système qui diffère du proposé par le changement de signe des termes en y. On verrait de même que si la valeur de x était négative, on pourrait la prendre avec le signe $+$, pourvu qu'on changeât dans les équations proposées le signe de tous les termes en x.

Les équations nouvelles, auxquelles satisfont les valeurs négatives des inconnues prises positivement, correspondent quelquefois à un problème peu différent du proposé ou à ce problème lui-même, entendu dans un sens plus général; mais cette remarque, comme dans le cas des équations à une inconnue, ne peut être développée que sur des questions particulières.

Digitized by Google

Considérons, par exemple, le problème suivant.

79. PROBLÈME. *Un vase de capacité* v *est rempli dans un temps* t *par* n *robinets, versant chacun la même quantité d'eau, et par la pluie tombée sur un toit dont la surface est* s. *Un autre vase de capacité* v' *est rempli dans le temps* t' *par* n' *robinets semblables aux précédents, et par la pluie tombant sur un toit* s' *avec la même intensité que sur un toit* s. *Déduire de ces données la quantité d'eau* x *versée par chaque robinet dans l'unité de temps et la quantité* y *versée par la pluie pendant chaque unité de temps, sur chaque unité de surface de toit.*

Un robinet versant, dans l'unité de temps, une quantité d'eau égale à x, dans le temps t, n robinets verseront nxt.

La pluie versant dans l'unité de temps, une quantité d'eau y sur l'unité de surface, versera, dans le temps t, sur s, une quantité d'eau syt, on aura donc

[1] $$nxt + syt = v.$$

En exprimant que le second bassin est rempli dans le temps t', on aura de même

[2] $$n'xt' + s'yt' = v',$$

et les équations [1] et [2] permettront de calculer x et y.

Supposons maintenant, qu'en les résolvant, on trouve pour x une valeur positive α, et pour y une valeur négative $-\beta$. Il faudra en conclure (78) que les valeurs $x = \alpha$, $y = \beta$ satisfont aux équations

$$nxt - syt = v,$$
$$n'xt' - syt' = v'.$$

Ces équations correspondent à un problème qui diffère du proposé, en ce que la pluie doit être remplacée par une cause qui enlève au bassin une quantité d'eau proportionnelle au temps et à la surface s; par exemple, par l'évaporation du liquide.

Si, au contraire, on trouvait pour x une valeur négative, cette valeur, prise positivement, satisferait aux équations

$$syt - nxt = v,$$
$$s'yt' - n'xt' = v'.$$

Ces équations correspondent à un problème différent du proposé, en ce que les robinets qui versent de l'eau, doivent être

remplacés par un nombre égal de causes qui en enlèvent, par exemple, par des orifices ou des pompes, enlevant une quantité x d'eau par unité de temps.

80. Les remarques faites (**74**) (**76**) au sujet des valeurs négatives trouvées pour un temps ou pour une longueur, s'appliquent sans modification au cas où les équations contiennent plus d'une inconnue.

RÉSUMÉ.

69. Les solutions négatives d'un système d'équations sont des nombres négatifs qui, substitués aux inconnues dans ces équations, et traités conformément aux conventions, rendent le premier membre égal au second. — **70.** Toute solution négative d'une équation du premier degré à une inconnue étant prise positivement, satisfait à une autre équation que l'on obtient en changeant dans la première le signe des termes qui contiennent l'inconnue. Cette nouvelle équation correspond quelquefois au problème proposé entendu dans un sens plus général. — **71.** Problème des courriers, interprétation de la solution négative par une légère extension de l'énoncé. Interprétation de la solution négative dans le problème suivant : dans combien de temps l'âge d'un individu sera-t-il double de celui d'un autre individu? Interprétation de la solution négative dans un problème de géométrie. — **72.** On remarque que toutes les solutions négatives ne s'interprètent pas aussi naturellement que celles dont il vient d'être question. — **73.** On prouve en général que si l'on prend pour inconnue le temps qui doit s'écouler jusqu'à un certain événement, la solution négative doit être comptée dans le passé. — **74.** Le raisonnement n'est pas tout à fait général. — **75.** Quand on prend pour inconnue la distance à porter sur une ligne, à partir d'un point donné, les solutions négatives doivent être portées dans une direction opposée à celle qui correspond aux solutions positives. — **76.** Le raisonnement n'est pas complètement général; on donne un exemple d'un cas dans lequel il est en défaut. — **77.** On introduit quelquefois des nombres négatifs comme représentation de données dans l'énoncé d'un problème. Introduction de vitesses négatives dans le problème des courriers. — **78.** Les solutions négatives d'un système d'équations étant prises positivement satisfont à un autre système qui diffère du premier par le changement de signe des termes qui contiennent l'inconnue dont la valeur est négative. — **79.** Interprétation des solutions négatives dans un problème à deux inconnues. — **80.** Les remarques faites (**74** et **76**) s'appliquent aux équations à plusieurs inconnues.

Digitized by Google

EXERCICES.

I. On donne des points A, B, C, D, situés sur une ligne droite à des distances a, b, c, d, d'un point O de cette droite; trouver sur cette droite un point X tel, que sa distance à un point quelconque M de la droite donnée soit la moyenne des distances de M aux points A, B, C, D. Montrer qu'à l'aide de conventions convenables on peut résoudre le problème par une seule formule, quelles que soient les positions de A, B, C, D, à droite ou à gauche de O.

II. On donne les deux bases a, b d'un trapèze et sa hauteur h. Calculer la hauteur du triangle obtenu en prolongeant les côtés jusqu'à leur rencontre; interpréter la solution quand elle est négative.

III. Inscrire un rectangle de périmètre donné dans un triangle dont la base est b et la hauteur h.

IV. n pierres sont rangées en ligne droite à dix mètres de distance les unes des autres. Déterminer, sur cette droite, la position d'un point X tel qu'il y ait m fois plus de chemin à faire pour transporter, successivement, chaque pierre au point X que pour les transporter à la place occupée par la première d'entre elles. On supposera, dans les deux cas, que l'on parte de cette première pierre. Si la solution est négative, est-il possible de l'interpréter?

V. Deux triangles rectangles ont leurs côtés dirigés suivant les mêmes droites et représentés par a, b; a', b'; calculer les perpendiculaires abaissées sur les côtés, du point d'intersection des hypothénuses, et discuter les différents cas qui peuvent se présenter.

CHAPITRE VIII.

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ.

Résolution de l'équation du second degré.

81. Une équation à une inconnue est du second degré quand elle peut être mise sous la forme

$$[1] \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

x désignant l'inconnue et a, b, c des nombres donnés.

Pour résoudre l'équation [1], multiplions ses deux membres par $4a$, ce qui est permis (45), pourvu que a ne soit pas nul, et faisons passer $4ac$ dans le second membre, nous obtiendrons

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac.$$

Si nous ajoutons b^2 aux deux membres de cette équation, elle devient

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac;$$

le premier membre étant, comme il est facile de le vérifier, le carré de $2ax + b$, cette équation peut s'écrire

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac,$$

ce qui équivaut à

$$2ax + b = \sqrt{b^2 - 4ac},$$

équation du premier degré dont on déduit

$$[2] \qquad x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

82. Remarque I. La formule [2] fournit deux valeurs distinctes de x, car l'expression $\sqrt{b^2 - 4ac}$ représente indifféremment deux nombres égaux et de signes contraires. Si par exemple $b^2 - 4ac$ est égal à 9, $\sqrt{b^2 - 4ac}$ est égal à $+3$ ou à -3. On

Digitized by Google

indique, en général, cette double valeur du radical en écrivant la formule [2] de la manière suivante

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

et l'on sous-entend alors que $+\sqrt{b^2 - 4ac}$ représente la valeur positive du radical et $-\sqrt{b^2 - 4ac}$ sa valeur négative.

Les solutions d'une équation sont appelées ses racines : on peut donc dire, d'après ce qui précède, que l'équation du second degré a deux racines x' et x'' exprimées par les formules

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

83. Remarque II. Si $b^2 - 4ac$ est négatif, $\sqrt{b^2 - 4ac}$ ne représente, d'après nos conventions, aucun nombre positif ou négatif, et l'équation proposée n'admet pas de solution. Cependant on dit alors qu'elle a deux racines *imaginaires* exprimées par la formule [2].

On désigne en général sous le nom de nombre imaginaire la racine carrée d'un nombre négatif. Il ne faut attacher à cette locution aucune idée relative à la mesure des grandeurs. Un nombre imaginaire, semblable en cela à un nombre négatif, ne représente aucune grandeur; mais, de même que les opérations faites sur les nombres négatifs, les opérations relatives aux nombres imaginaires reçoivent, conventionnellement, un sens, et deviennent un moyen précieux de généralisation. La première de ces conventions consiste en ce que le carré de l'expression $\sqrt{-A}$ est $-A$; pour définir les autres opérations, on convient d'appliquer aux nombres imaginaires toutes les règles démontrées généralement pour les nombres réels.

Nous reviendrons, du reste, dans un chapitre spécial, sur la théorie des nombres imaginaires.

84. Remarque III. Si $b^2 - 4ac$ est nul, les deux valeurs de $\sqrt{b^2 - 4ac}$ se réduisent à zéro, et les racines deviennent, l'une et l'autre,

$$x = -\frac{b}{2a},$$

Digitized by Google

l'équation n'admet donc qu'une seule solution. On dit cependant qu'elle a deux racines égales.

85. En résumé, l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

admet quelquefois deux solutions, quelquefois une seule, et quelquefois enfin n'en admet aucune. On dit cependant qu'elle en admet toujours deux qui peuvent être réelles et différentes, réelles et égales, ou imaginaires. Il peut sembler puéril, au premier abord, de choisir, ainsi, une forme détournée pour affirmer, dans tous les cas, l'existence de deux racines qui n'en existent pas pour cela davantage. Ces locutions et l'introduction dans les calculs de nombres imaginaires sont cependant une conséquence de l'esprit de généralisation qui règne en algèbre. Il serait impossible, en effet, d'opérer sur des expressions *littérales*, si la forme des résultats changeait avec la valeur numérique des lettres. Il faudrait, à chaque instant, diviser et subdiviser les questions pour obtenir les formules correspondantes à telle ou telle hypothèse. L'adoption des nombres négatifs et imaginaires a pour but d'éviter cet inconvénient. Dans une question particulière, l'introduction de ces nombres n'aurait aucune utilité, mais dans l'étude générale d'une classe de questions, ils permettent d'exprimer et de démontrer, en une fois, des règles et des résultats qui exigeraient, sans cela, des démonstrations et des formules distinctes.

Relation entre les racines d'une équation du second degré.

86. L'équation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

a, comme on l'a vu, deux racines

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

Digitized by Google

si on les ajoute, on trouve

$$x' + x'' = -\frac{b}{a},$$

et si on les multiplie

$$x'x'' = \frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})\,(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a};$$

la somme et le produit des racines dépendent donc d'une manière simple des coefficients de l'équation.

87. D'après ce qui précède, la solution de l'équation du second degré permet de résoudre le problème suivant. *Trouver deux nombres connaissant leur somme et leur produit.*

Soient, en effet, S la somme de deux nombres et P leur produit, on pourra prendre, pour ces deux nombres, les racines de l'équation

[1] $$x^2 - Sx + P = 0,$$

car (86) la somme de ces racines est S et leur produit P. Il est facile de donner à l'équation [1] une forme qui montre, *a priori,* la raison de ce fait, on peut, en effet, l'écrire

$$P = Sx - x^2,$$

ou $$P = x(S - x),$$

et l'on voit que résoudre cette équation, c'est trouver deux nombres x et $S-x$ dont le produit soit P; d'ailleurs la somme de ces deux nombres $x + S - x$ est évidemment égale à S.

Application des résultats précédents.

88. Si x' et x'' désignent les racines de l'équation

[1] $$ax^2 + bx + c = 0,$$

on a (86) $$x' + x'' = -\frac{b}{a},$$

$$x'x'' = \frac{c}{a}.$$

Si l'on divise les deux membres de l'équation [1] par a et que

l'on remplace $\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$ par les valeurs précédentes, son premier membre devient

$$x^2-(x'+x'')x+x'x'',$$

ou, comme il est facile de le vérifier,

$$(x-x')(x-x'').$$

Ainsi, le premier membre d'une équation du second degré

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

est le produit de deux binomes du premier degré égaux à l'excès de x sur chacune des racines.

Si l'équation proposée est de la forme

$$ax^2+bx+c=0,$$

c'est seulement, après l'avoir divisée par a, que l'on peut lui appliquer le résultat précédent, et, par suite, avant cette division, le premier membre est égal à

$$a(x-x')(x-x'').$$

89. Si les deux racines x' et x'' sont égales, les facteurs $x-x'$, $x-x''$ deviennent égaux, et le premier membre est un carré parfait. Ce résultat est d'ailleurs facile à vérifier. Pour que les racines de l'équation

$$ax^2+bx+c=0$$

soient égales, il faut (84) que l'on ait

$$b^2=4ac,$$

ou

$$c=\frac{b^2}{4a}$$

remplaçant c par sa valeur et divisant les deux membres de l'équation par a, celle-ci devient

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=0,$$

c'est-à-dire

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0.$$

90. Les relations qui donnent la somme et le produit de

Digitized by Google

deux racines permettent de déterminer leurs signes sans résoudre l'équation.

On voit, en effet, d'après le signe de leur produit $\frac{c}{a}$, si les racines sont de même signe ou de signes contraires. Dans le premier cas, le signe de la somme $-\frac{b}{a}$, apprendra si elles sont toutes deux positives ou toutes deux négatives. Dans le second cas, l'une est positive et l'autre négative, et le signe de $-\frac{b}{a}$ fait savoir quel est le signe de la plus grande.

Exemple. Les racines de l'équation

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

sont de signes contraires, car leur produit est -4, et la plus grande est positive car leur somme est positive et égale à 3.

Remarque. Avant d'appliquer les règles précédentes il faut s'assurer que les racines sont réelles. Si nous considérons, par exemple, l'équation

$$x^2 - 3x + 10 = 0,$$

on serait conduit (90) à regarder les racines comme toutes deux positives, car leur produit 10 est positif ainsi que leur somme 3. Mais l'expression $b^2 - 4ac$ (85) étant ici égale à -31 est négative et les racines sont imaginaires.

Nous remarquerons, à cette occasion, que les racines sont toujours réelles lorsque leur produit $\frac{c}{a}$ est négatif. Si, en effet, $\frac{c}{a}$ est négatif, il en est de même de ac, car on a

$$ac = \frac{c}{a} \times a^2,$$

et le facteur a^2 est essentiellement positif. ac étant négatif, $4ac$ est négatif, par suite $-4ac$ est positif et il en est, *a fortiori*, de même de $b^2 - 4ac$; les racines sont donc réelles.

Examen d'un cas particulier remarquable.

91. Lorsque, dans l'équation,

$$ax^2 + bx + c = 0;$$

on suppose que le coefficient a prenne la valeur 0, les formules qui expriment les racines,

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

prennent la forme $$x' = \frac{0}{0},$$

$$x'' = \frac{-2b}{0};$$

d'un autre côté, l'équation proposée devient,

$$bx + c = 0,$$

elle est alors du premier degré et n'admet qu'une seule solution,

$$x = -\frac{c}{b};$$

les formules générales semblent donc, dans ce cas, en défaut.

Remarquons d'abord que, si réellement il en était ainsi, il n'en faudrait rien conclure contre les raisonnements qui y ont conduit, car ces raisonnements supposent, expressément (**81**), que a ne soit pas nul.

Cependant les valeurs de x' et de x'' satisfaisant à l'équation proposée, quel que soit a, lorsque a tend vers zéro, l'une d'elles doit approcher de la solution de

$$bx + c = 0.$$

C'est ce que nous allons vérifier pour la première. La seconde augmente évidemment sans limite quand a diminue.

On a $$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Multiplions les deux termes de cette fraction par $-b-\sqrt{b^2-4ac}$, il viendra

$$x=\frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})};$$

ou en effectuant la multiplication indiquée au numérateur, et remarquant que l'on a le produit de la somme de deux nombres $-b+\sqrt{b^2-4ac}$ par leur différence $-b-\sqrt{b^2-4ac}$:

$$x'=\frac{b^2-b^2+4ac}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}=\frac{4ac}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}$$
$$=\frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}},$$

et sous cette forme, il est évident que, a tendant vers zéro, x s'approche de la valeur $-\frac{2c}{2b}$ ou $-\frac{c}{b}$.

Solution de quelques problèmes.

92. Problème I. *Calculer la profondeur d'un puits, sachant qu'il s'est écoulé un nombre* t *de secondes entre l'instant où l'on a laissé tomber une pierre, et celui où le bruit qu'elle a fait en frappant le fond est revenu frapper l'oreille.*

Pour résoudre ce problème, il faut se rappeler deux principes de physique.

1° L'espace parcouru par un corps pesant est proportionnel au carré du temps écoulé depuis le commencement de la chute, et représenté par la formule,

$$e=\frac{gt^2}{2},$$

g étant un coefficient constant égal à $9^m,809$.

2° Le son se meut d'un mouvement uniforme et parcourt 333^m par seconde. Dans le calcul qui va suivre, nous représenterons sa vitesse par v; de sorte que, dans le temps t, il parcourt vt.

Soit x la profondeur du puits évaluée en mètres. En nommant t_1 le nombre de secondes que la pierre met à descendre, on a

$$[1] \qquad x=\frac{gt_1^2}{2}, \text{ d'où } t_1=\sqrt{\frac{2x}{g}}.$$

Si t_2 désigne le temps que le son met à remonter, on a

[2] $$x = vt_2, \quad \text{d'où} \quad t_2 = \frac{x}{v},$$

en sorte que

[3] $$t_1 + t_2 = t = \frac{x}{v} + \sqrt{\frac{2x}{g}}.$$

Pour résoudre cette équation, mettons-la sous la forme

[4] $$t - \frac{x}{v} = \sqrt{\frac{2x}{g}}.$$

En élevant les deux membres au carré, on a

[5] $$t^2 - \frac{2tx}{v} + \frac{x^2}{v^2} = \frac{2x}{g};$$

ou, en faisant passer tous les termes dans le premier membre,

[6] $$\frac{x^2}{v^2} - x\left(\frac{2t}{v} + \frac{2}{g}\right) + t^2 = 0,$$

d'où l'on déduit

[7] $$x = \frac{\frac{t}{v} + \frac{1}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{t}{v} + \frac{1}{g}\right)^2 - \frac{t^2}{v^2}}}{\frac{1}{v^2}}.$$

Les deux racines sont réelles, car la quantité placée sous le radical,

$$\left(\frac{t}{v} + \frac{1}{g}\right)^2 - \frac{t^2}{v^2}$$

est évidemment positive.

Il est facile de voir qu'elles sont toutes deux positives : car leur produit t^2v^2 est positif, ainsi que leur somme $\left(\frac{2t}{v} + \frac{2}{g}\right)v^2$. Le problème ne peut cependant avoir qu'une solution : car deux puits de profondeur différente ne peuvent correspondre à une même valeur de t. Pour expliquer cette singularité, et trouver celle des deux racines qui répond à la question, remarquons qu'en élevant au carré les deux membres de l'équation [4], nous formons une équation nouvelle, qui, il est vrai, ne peut manquer d'être satisfaite si la proposée l'est elle-même, mais qui peut l'être, aussi, sans que celle-ci le soit. Les deux membres

auraient, en effet, même carré s'ils étaient égaux et de signes contraires : l'équation [5] équivaut donc réellement aux deux suivantes :

$$t-\frac{x}{v}=\sqrt{\frac{2x}{g}},$$

$$t-\frac{x}{v}=-\sqrt{\frac{2x}{g}}.$$

La première de ces équations correspond seule au problème proposé, et sa solution, qui est moindre que vt, puisque $t-\frac{x}{v}$ est positif, satisfait à ce problème. La solution de la seconde équation, qui est plus grande que vt, est par conséquent la plus grande racine de [5] : elle doit être rejetée comme solution étrangère.

PROBLÈME II. *Diviser une droite en moyenne et extrême raison, c'est-à-dire la partager en deux parties telles que l'une d'elles soit moyenne proportionnelle entre la ligne entière et l'autre partie.*

Soit a la ligne donnée et x la plus grande partie, on doit avoir

$$a : x :: x : a-x,$$

ou

$$x^2=(a-x)a$$

$$x^2+ax-a^2=0,$$

et, par suite,

$$x=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}=-\frac{a}{2}\pm\frac{a}{2}\sqrt{5}.$$

L'une des racines est positive et donne la valeur de x, l'autre est négative et doit être rejetée.

On peut interpréter la racine négative. Désignons-la en effet par $-\alpha$; on doit avoir

$$(-\alpha)^2=a[a-(-\alpha)],$$

ou

$$\alpha^2=a(a+\alpha);$$

donc α est moyenne proportionnelle entre a et $a+\alpha$, et répond évidemment à la question suivante.

Trouver sur la ligne AB prolongée

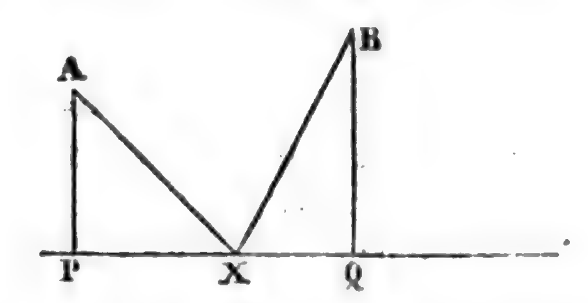
X A B

Digitized by Google

un point X, tel que la distance AX (α) soit moyenne proportionnelle entre AB (a) et XB ($a+\alpha$).

Il arrive donc, comme dans la plupart des problèmes du premier degré (75), que la solution négative doit être portée sur la droite AB en sens opposé à la solution positive.

Problème III. *Trouver sur une ligne* PQ *un point* X *également éclairé par deux lumières* A *et* B *dont les intensités sont* i *et* i'; *on donne* AP=a, BQ=b *et* PQ=d. AP *et* PQ *étant les perpendiculaires abaissées des points* A *et* B *sur la ligne* PQ.



On doit se rappeler, pour résoudre ce problème, que l'intensité de la lumière est en raison inverse du carré de la distance du point éclairé au point lumineux, de sorte qu'une lumière d'intensité i éclaire à la distance x avec une intensité $\frac{i}{x^2}$.

On doit avoir, par conséquent,

$$\frac{i}{\overline{AX}^2}=\frac{i'}{\overline{BX}^2}$$

ou en désignant PX par x et, par conséquent, QX par $d-x$

$$\frac{i}{a^2+x^2}=\frac{i'}{b^2+(d-x)^2}$$

ou, en chassant les dénominateurs,

$$[b^2+(d-x)^2]i=(a^2+x^2)i'.$$

Sans entrer dans les détails de la solution de cette équation et des conditions de possibilité du problème, cherchons à interpréter les solutions négatives qu'elle peut avoir. En désignant par $-\alpha$ une solution négative, on doit avoir

$$\frac{i}{a^2+\alpha^2}=\frac{i'}{b^2+(d+\alpha)^2},$$

ce qui est précisément l'équation que l'on aurait dû écrire si, cherchant le point X à gauche de P, on avait désigné par x sa distance inconnue au point P. Les solutions négatives fournissent donc des solutions du problème proposé, pourvu que l'on porte la longueur qu'elles représentent à gauche du point P, c'est-à-dire dans un sens opposé à celui qui correspond aux solutions positives.

RÉSUMÉ.

81. Résolution de l'équation $ax^2+bx+c=0$. — 82. La formule trouvée dépend de l'expression $\sqrt{b^2-4ac}$ et est, par conséquent, susceptible de deux valeurs distinctes. On exprime ce résultat en disant que l'équation du second degré a deux racines. — 83. Lorsque $\sqrt{b^2-4ac}$ est négatif, $\sqrt{b^2-4ac}$ ne représente aucun nombre positif ou négatif; on dit alors que les racines sont imaginaires. — 84. Si $\sqrt{b^2-4ac}$ est nul, il n'y a qu'une seule racine; mais on dit qu'il y a deux racines égales. — 85. Dans tous les cas, on peut dire que l'équation du second degré a deux racines. — 86. Expression de la somme et du produit des racines. — 87. Trouver deux nombres connaissant leur somme et leur produit. — 88. Le premier membre d'une équation du second degré qui a pour racines x' et x'' peut être mis sous la forme $(x-x')(x-x'')$. — 89. Si les deux racines sont égales, le premier membre est un carré. — 90. Les relations qui donnent la somme et le produit des racines permettent de prévoir leurs signes sans résoudre l'équation, pourvu que l'on soit assuré qu'elles ne sont pas imaginaires. — 91. Examen du cas où le coefficient de x^2 est nul. — 92. Solution de quelques problèmes. Cas où une racine positive doit être rejetée comme solution étrangère. Cas où une racine négative s'interprète.

EXERCICES.

I. Former la somme des carrés, la somme des cubes, la somme des quatrièmes puissances et la somme des inverses des quatrièmes puissances des racines de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

II. Conditions nécessaires pour que la fraction

$$\frac{Ax^2+Bx+C}{A'x^2+B'x+C'}$$

soit indépendante de x.

III. Si l'on a

$$\frac{Ax^2+Bx+C}{A'x^2+B'x+C'}=\frac{Ay^2+By+C}{A'y^2+B'y+C'}=\frac{Az^2+Bz+C}{A'z^2+B'z+C'},$$

deux des nombres x, y, z sont égaux entre eux, à moins que l'on n'ait

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}.$$

IV. Conditions pour que la fraction

$$\frac{Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F}{A'y^2+B'xy+C'x^2+D'y+E'x+F'}$$

soit indépendante de x et de y.

V. Un voyageur part d'un point B pour aller vers C, en même temps qu'un autre voyageur part de C pour aller vers B. Chacun d'eux marche avec une vitesse constante. Ces deux vitesses ont un rapport tel que le premier arrive en C quatre heures après qu'ils se sont rencontrés, et le second arrive en B neuf heures après cette rencontre. Quel est le rapport des vitesses?

VI. Résoudre l'équation

$$2x\sqrt[3]{x}-3x\sqrt[3]{\frac{1}{x}}=20.$$

VII. Résoudre l'équation

$$2x^2+3x-5\sqrt{2x^2+3x+9}+3=0.$$

VIII. Résoudre

$$\frac{1}{x-\sqrt{2-x^2}}-\frac{1}{x+\sqrt{2-x^2}}=1.$$

IX. Résoudre

$$\sqrt[n]{(1+x)^2}-\sqrt[n]{(1-x)^2}=\sqrt[n]{1-x^2}.$$

X. Résoudre

$$\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{3}}{x^2}.$$

XI. Résoudre $x^2+\sqrt{5x+x^2}=42-5x.$

XII. Limite de $\sqrt{x^2+5x+1}-x$ lorsque x augmente indéfiniment.

XIII. Limite de $a-\sqrt{a^2-b}$. a et b augmentent de manière à ce que le rapport $\frac{b^2}{a}$ s'approche d'une limite fixe.

XIV. On donne un cercle et un point O sur un diamètre. Trouver une droite P perpendiculaire à ce diamètre et telle qu'en menant par le point O une sécante qui coupe le cercle en A et B, et désignant par p et q les distances des points A et B à la droite P, la somme $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ soit indépendante de la direction de AB.

XV. Deux cercles étant placés l'un dans l'autre, trouver sur la ligne des centres un point tel que les distances à deux points où les cercles sont coupés par une même perpendiculaire à la ligne des centres soient dans un rapport constant.

XVI. Résoudre l'équation

$$a^2b^2x^{\frac{1}{q}} - 4(ab)^{\frac{3}{2}}x^{\frac{p+q}{2pq}} = (ab)^2x^{\frac{1}{p}}.$$

XVII. Résoudre l'équation

$$\sqrt[2pq]{x^{p+q}} - \frac{1}{2}\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}(\sqrt[p]{x}+\sqrt[q]{x}) = 0.$$

XVIII. Résoudre l'équation

$$\frac{(27a+8x)^{\frac{2}{3}}}{15x^{\frac{13}{15}}} + \frac{8x^{\frac{2}{15}}}{3\sqrt[3]{27a+8x}} = \frac{8}{5\sqrt[5]{x}}.$$

XIX. Résoudre l'équation

$$\frac{x^2}{8a} + \frac{2x}{3} = \sqrt{\frac{x^3}{3a} + \frac{x^2}{4} - \frac{a}{2}}.$$

CHAPITRE IX.

ÉQUATIONS QUI SE RAMÈNENT A CELLES DU SECOND DEGRÉ.

Équations bicarrées.

93. Quelques équations d'un degré plus élevé que le second peuvent se ramener à celles du second degré par un changement d'inconnue.

Nous considérerons en particulier l'équation

[1] $$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

que l'on nomme équation bicarrée.

Si l'on prend x^2 pour inconnue, cette équation devient du second degré : en posant, en effet, $x^2 = z$, on a $x^4 = z^2$ et l'équation [1] devient

$$az^2 + bz + c = 0,$$

d'où l'on déduit $z = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$;

et, par suite, $x = \pm \sqrt{\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$.

x admet donc, en général, quatre valeurs égales deux à deux et de signes contraires. Toutes les quatre sont réelles si les deux valeurs de z sont positives; si l'une de ces valeurs est positive et l'autre négative, la première seulement admet une racine carrée réelle, et deux des valeurs de x sont imaginaires; enfin, si l'équation en z a ses deux racines négatives ou imaginaires, x n'admet aucune valeur réelle.

Digitized by Google

Transformation des expressions de la forme $\sqrt{a+\sqrt{b}}$.

94. On peut quelquefois transformer les expressions de la forme $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ en une somme de deux radicaux simples, et poser

$$[1] \qquad \sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\sqrt{y},$$

x et y étant commensurables, sans cela, la transformation n'aurait aucun avantage. On a, en effet, en élevant au carré les deux membres de l'équation [1],

$$[2] \qquad a+\sqrt{b}=x+y+2\sqrt{xy},$$

équation à laquelle on satisfera évidemment si l'on pose

$$[3] \qquad \begin{cases} a=x+y, \\ \sqrt{b}=2\sqrt{xy}, \end{cases}$$

et par suite

$$[4] \qquad \begin{cases} a=x+y, \\ b=4xy. \end{cases}$$

D'après ces deux équations [4], x et y sont (87) les deux racines de l'équation

$$z^2-az+\frac{b}{4}=0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2},$$

$$\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}.$$

Si donc a^2-b est un carré, les valeurs de x et de y seront rationnelles et la transformation sera effectuée par la formule

$$[5] \qquad \sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Cette formule [5] est vraie quels que soient a et b, mais il n'y a avantage à l'employer que si a^2-b est un carré.

95. REMARQUE I. La démonstration de la formule [5]

laisse subsister une difficulté sur laquelle il convient de revenir.

L'équation à laquelle il faut satisfaire étant

[1] $$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}.$$

Nous avons commencé par lui substituer la suivante,

[2] $$a+\sqrt{b}=x+y+2\sqrt{xy},$$

que l'on obtient en élevant ses deux membres au carré. Or cette équation [2] est plus générale que la proposée, elle pourrait être satisfaite si l'on avait

$$-\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}.$$

Mais si nous convenons de prendre les radicaux avec le signe $+$, cette dernière égalité deviendra impossible et l'équation [2] devient alors complétement équivalente à [1]. Il est évident que l'on y satisfera, en posant

[3] $$\begin{cases} a=x+y, \\ \sqrt{b}=2\sqrt{xy}. \end{cases}$$

Lorsque, à ces deux équations, nous substituons

[4] $$\begin{cases} a=x+y, \\ b=4xy, \end{cases}$$

il se présente une difficulté analogue à la précédente; l'équation $b=4xy$ est plus générale que $\sqrt{b}=2\sqrt{xy}$ et pourrait être satisfaite si l'on avait $-\sqrt{b}=2\sqrt{xy}$; mais la difficulté disparaît encore, si l'on convient que tous les radicaux sont positifs.

96. Remarque II. Si l'on avait à transformer $\sqrt{a-\sqrt{b}}$ on poserait

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{x}-\sqrt{y},$$

ou $$a-\sqrt{b}=x+y-2\sqrt{xy},$$

et l'on y satisfera évidemment en posant

$$a=x+y,$$
$$\sqrt{b}=2\sqrt{xy},$$

Digitized by Google

qui ne diffèrent pas des équations [4]. x et y ont donc les mêmes valeurs que dans le cas précédent, et l'on a,

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

97. Remarque III. Pour satisfaire à l'équation

[2] $$a+\sqrt{b}=x+y+2\sqrt{xy},$$

nous avons posé [3] $$a=x+y,$$
$$\sqrt{b}=2\sqrt{xy},$$

il est évident, en effet, que ces deux équations entraînent la proposée, mais on peut démontrer, en outre, qu'elles sont nécessaires si l'on suppose que a, b, x et y soient rationnels.

En général, si l'on a

[1] $$a+\sqrt{b}=a'+\sqrt{b'};$$

a, b, a', b' étant rationnels, il faut que a et b soient respectivement égaux à a' et b'. On déduit, en effet, de [1]

$$\sqrt{b}=a'-a+\sqrt{b'},$$

et, en élevant les deux membres au carré,

$$b=(a'-a)^2+2(a'-a)\sqrt{b'}+b':$$

le premier membre est commensurable, et si l'on n'avait pas $a'=a$, le second ne le serait pas; a doit donc être égal à a', et il faut, par suite, que b soit égal à b'. Pour appliquer ce résultat à l'équation [2], il suffit de remplacer a' par $x+y$ et b' par $4xy$, car $2\sqrt{xy}=\sqrt{4xy}$.

Quelques exemples d'équations simultanées de degré supérieur au premier.

98. La résolution des équations simultanées est une des questions les plus compliquées de l'algèbre. Nous n'avons pas l'intention d'en aborder ici la théorie générale, nous nous bornerons à traiter quelques cas fort simples.

On peut résoudre deux équations à deux inconnues, l'une du premier et l'autre du second degré.

Digitized by Google

Soit, en effet, le système

[1] $$ax + by = c,$$

[2] $$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

On déduit de l'équation [1]

[3] $$y = \frac{c - ax}{b}.$$

En portant cette valeur dans l'équation [2], on obtiendra une équation du second degré en x, qui fournira, pour cette inconnue, deux valeurs, à chacune desquelles, correspondra une valeur de y fournie par la formule [3].

99. Nous résoudrons encore quelques systèmes simples, pour faire connaître des artifices fréquemment employés.

1° Soit le système $x^2y + y^2x = 30,$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6};$$

ou, en chassant le dénominateur de la seconde équation,

$$xy(x + y) = 30,$$
$$6(x + y) = 5xy.$$

Si donc on considère xy et $x + y$ comme deux inconnues u et v, on aura,

$$uv = 30,$$
$$6v = 5u.$$

La seconde équation donne $v = \frac{5}{6}u$; en substituant cette valeur dans la première, elle devient

$$\frac{5}{6}u^2 = 30,$$

ou $$u^2 = 36,$$
$$u = \pm 6;$$

et on en conclut, $$v = \pm 5.$$

Il faut adopter le même signe pour la valeur de u et pour celle de v, puisque $v = \frac{5}{6}u$.

Google

Si nous adoptons les valeurs $u=6$, $v=5$, on a

$$x+y=5,$$
$$xy=6,$$

d'où l'on déduit pour x et y les valeurs 2 et 3.

Si nous adoptons $v=-6$, $u=-5$, on a

$$x+y=-5,$$
$$xy=-6,$$

d'où l'on déduit pour x et y les valeurs -6 et 1.

2° Soit encore le système

$$\frac{4}{y^2}+\frac{4+y}{y}=\frac{8+4y}{x}+\frac{12y^2}{x^2},$$
$$4y^2-xy=x.$$

La première équation devient, si l'on chasse les dénominateurs,

$$4x^2+(4+y)yx^2=(8+4y)xy^2+12y^4,$$

que l'on peut écrire,

$$x^2(2+y)^2-4xy^2(2+y)+4y^4=16y^4,$$

le premier membre étant le carré de $x(2+y)-2y^2$, cette équation peut s'écrire,

$$[x(2+y)-2y^2]^2=(4y^2)^2;$$

ce qui équivaut à,

$$x(2+y)-2y^2=\pm 4y^2.$$

Nous pouvons donc, au système proposé, substituer les deux suivants :

$$x(2+y)-2y^2=4y^2 \qquad x(2+y)-2y^2=-4y^2$$
$$4y^2-xy=x \qquad\qquad 4y^2-xy=x,$$

que l'on résoudra sans difficulté en résolvant la seconde équation par rapport à x, et reportant la valeur trouvée, dans la première.

100. Quelques problèmes sont considérablement simplifiés par un choix habile de l'inconnue. En voici un exemple :

Trouver quatre nombres en proportion connaissant la somme des moyens 2s, *la somme des extrêmes* 2s', *et la somme des carrés des quatre termes* 4q.

Prenons pour inconnue le produit x des moyens, leur somme étant $2s$, ils sont (87) racines de l'équation

$$z^2 - 2sz + x = 0,$$

et égaux, par conséquent, à,

$$s + \sqrt{s^2 - x},$$
$$s - \sqrt{s^2 - x}.$$

On verra, de la même manière, que les extrêmes sont,

$$s' + \sqrt{s'^2 - x},$$
$$s' - \sqrt{s'^2 - x}.$$

En formant la somme des carrés de ces quatre expressions, on trouve

$$4s^2 + 4s'^2 - 4x,$$

l'équation du problème est donc

$$4s^2 + 4s'^2 - 4x = 4q;$$

d'où l'on déduira la valeur de x, et, par suite, les quatre termes de la proportion qui sont,

$$s' + \sqrt{q - s^2}, \quad s + \sqrt{q - s'^2}, \quad s - \sqrt{q - s'^2}, \quad s' - \sqrt{q - s^2}.$$

Il est naturel de prendre pour inconnue le produit des moyens, parce que ce produit, pour chaque proportion, n'admet qu'une seule valeur. Si l'on cherchait, par exemple, à déterminer un des moyens, on devrait les trouver tous les deux par le même calcul, car rien ne les distingue dans l'énoncé L'équation serait donc au moins du second degré.

101. Nous donnerons encore la solution du problème suivant :

Trouver une proportion connaissant la somme 4s *de ses termes, la somme* 4q *de leurs carrés et la somme* 4c *de leurs cubes.*

Prenons pour inconnue la différence $4x$ entre la somme des extrêmes et la somme des moyens, soit y le produit des extrêmes

et a, b, c, d les quatre termes de la proportion, on a

$$a+b+c+d=4s,$$
$$a+b-(c+d)=4x;$$

d'où l'on déduit,

$$a+b=2s+2x,$$
$$c+d=2s-2x,$$

comme l'on a,

$$ab=y,$$
$$cd=y,$$

on en déduit (87) pour a, b, c, d les valeurs

$$s+x+\sqrt{(s+x)^2-y},$$
$$s+x-\sqrt{(s+x^2)-y},$$
$$s-x+\sqrt{(s-x)^2-y},$$
$$s-x-\sqrt{(s-x)^2-y}.$$

La somme des quatre carrés est, comme on le calcule facilement,

$$8(s^2+x^2)-4y,$$

et la somme des quatre cubes,

$$165(s^2+3x^2)-125y,$$

ce qui fournit les équations,

$$8(s^2+x^2)\ -4y\ \ =4q,$$
$$165(s^2+3x^2)-125y=4c,$$

que l'on résoudra sans difficulté.

RÉSUMÉ.

93. Résolution de l'équation bicarrée; elle peut avoir les quatre racines réelles, deux racines réelles et deux imaginaires, ou quatre racines imaginaires. — **94.** Transformation de l'expression $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ en une somme de deux radicaux. — **95.** Examen de quelques difficultés que peut présenter la démonstration précédente. — **96.** On peut, par le même calcul, transformer $\sqrt{a-\sqrt{b}}$. — **97.** Pour que deux expressions de la forme $a+\sqrt{b}$, $a'+\sqrt{b'}$ soient égales, a, b, a', b' étant des membres commensurables, il faut que l'on ait $a=a'$, $b=b'$. — **98.** Résolutions de deux équations à deux inconnues, l'une du premier, l'autre du second

degré.—99. Systèmes d'équations qui se simplifient par un changement d'inconnues. — 100 et 101. Solutions de deux problèmes qui deviennent très-faciles par un choix habile de l'inconnue.

EXERCICES.

I. Résoudre les équations

$$a^n x^m + b^m y^n = 2(ax)^{\frac{m}{2}}(by)^{\frac{n}{2}}$$
$$xy = ab.$$

II. On donne la somme q des surfaces de deux rectangles, la somme a de leurs bases, et les surfaces p et p', des deux rectangles qui auraient la base de l'un et la hauteur de l'autre. Trouver ces rectangles.

III. Trouver une progression connaissant la somme de ses termes, la somme de leurs carrés et la somme de leurs cubes.

IV. Résoudre $\frac{xy}{z} = q$, $\frac{xz}{y} = q'$, $\frac{yz}{x} = q''$.

V. Résoudre

$$x(y + z) = p,$$
$$y(x + z) = p',$$
$$z(x + y) = p''.$$

VI. Résoudre

$$2(ab + xy) + (a + b)(x + y) = 0,$$
$$2(cd + xy) + (c + d)(x + y) = 0.$$

VII. Résoudre $x + y = a$, $x^4 + y^4 = d^4$.

VIII. Résoudre les deux équations

$$a^3 - x^3 = 3xy,$$
$$(\sqrt{y} - \sqrt{x})(a - x) = 3\sqrt{x}(x + y).$$

IX. Résoudre

$$\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{61}{\sqrt{xy}} + 1,$$
$$\sqrt[4]{x^3 y} + \sqrt[4]{xy^3} = 78.$$

X. Résoudre les équations

$$y\sqrt{(a - x)(x - b)} + x\sqrt{(a - y)(b - y)}$$
$$= 2\left[b\sqrt{(a - x)(a - y)} + a\sqrt{(x - b)(b - y)}\right],$$
$$xy = 4ab.$$

Digitized by Google

XI. Résoudre les équations

$$\frac{xyz}{x+y}=a, \quad \frac{xyz}{x+z}=b, \quad \frac{xyz}{y+z}=c.$$

XII. Trouver quatre nombres en progression par quotient connaissant leur somme et celle de leurs carrés.

XIII. Trouver un nombre de deux chiffres tel que, divisé par le produit de ces deux chiffres, il donne pour quotient $5\frac{1}{3}$, et que, si on en retranche 9, on obtienne le nombre renversé.

XIV. Trouver un nombre de trois chiffres tel que le second chiffre soit moyen proportionnel entre les deux autres, que le nombre soit à la somme de ses chiffres comme 124 est à 7, et qu'en lui ajoutant 594, on obtienne le nombre renversé.

XV. Résoudre les équations

$$x-y+\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}=\frac{20}{x+y},$$
$$x^2+y^2=34.$$

XVI. Résoudre les équations

$$(x+y)(xy+1)=18xy,$$
$$(x^2+y^2)(x^2y^2+1)=208x^2y^2.$$

XVII. Résoudre les équations

$$(\sqrt{x})^{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}=(\sqrt{y})^{\frac{8}{3}},$$
$$(\sqrt{y})^{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}=(\sqrt{x})^{\frac{2}{3}}.$$

XVIII. Résoudre les équations

$$\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{y^4x^2}}=a,$$
$$x+y+3\sqrt[3]{bxy}=b.$$

XIX. Résoudre les équations

$$x^{\frac{4}{2}}+x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{3}{4}}+y^{\frac{4}{2}}=a,$$
$$x^3+x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{6}{2}}=b.$$

XX. Résoudre les équations

$$\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}=a, \quad \frac{x^2-xy+y^2}{x-y}=b.$$

XXI. Trouver cinq nombres en progression par différence connaissant leur somme et leur produit.

XXII. Trouver quatre nombres en progression par différence connaissant leur somme et celle de leurs inverses.

XXIII. Résoudre les deux équations

$$(1+x^2)^2(1+y^2)-(1+x^2)^2(1-y^2)=4x^2\sqrt{1+y^4},$$
$$4xy=\sqrt{2}(1-x^2)(1-y^2).$$

XXIV. Résoudre les deux équations

$$(x^4+2bx^2y+a^2y^2)(y^4+2bxy^2+a^2x^2)=4(a^2-b^2)(b+c)^2x^2y^2,$$
$$x^3+y^3=2cxy.$$

Digitized by Google

CHAPITRE X.

THEORIE DES INÉGALITÉS.

Définitions.

102. On dit qu'un nombre A, est plus grand qu'un autre nombre B, lorsque la différence A—B est positive. D'après cette définition, tout nombre positif est plus grand qu'un nombre négatif, et les nombres négatifs sont d'autant plus grands, que leur valeur absolue est plus petite.

EXEMPLES. On a

$$1 > -8,$$

$$-7 > -20,$$

on a aussi

$$0 > -4.$$

103. Lorsqu'une expression qui dépend d'un nombre inconnu, doit être plus grande ou plus petite qu'une autre, cette condition, que l'on nomme inégalité, permet, en général, d'assigner des limites entre lesquelles l'inconnue doit être ou ne doit pas être comprise. Nous en donnons dans ce chapitre quelques exemples.

Principes généraux relatifs aux inégalités.

104. Une inégalité étant donnée, on peut, sans altérer les conditions qu'elle exprime, ajouter ou retrancher un même nombre à ses deux membres, et par conséquent, faire passer un terme d'un membre dans l'autre comme s'il s'agissait d'une équation. On ne change pas, en effet, la différence de deux nombres, en les augmentant et les diminuant également, et l'inégalité qui existait entre eux, subsiste, par conséquent, dans le même sens, après cette addition.

Ainsi, à l'inégalité

$$A > B$$

on peut substituer, quel que soit m,

$$A + m > B + m.$$

Digitized by Google

105. On peut aussi multiplier par un même nombre les deux membres d'une inégalité, *pourvu que ce nombre soit positif*. Les deux conditions

$$A > B,$$
$$mA > mB,$$

sont, en effet, complétement équivalentes puisque la différence $mA - mB$ ou $m(A - B)$ est de même signe que $A - B$, si m est positif.

On peut aussi multiplier, par un nombre négatif, les deux membres d'une inégalité, mais il faut alors en changer le sens. Ainsi, n désignant un nombre négatif, les inégalités

$$A > B,$$
$$nA < nB$$

sont équivalentes, car la différence $nA - nB$ ou $n(A - B)$ est de signe contraire à $A - B$.

La même remarque s'applique à la division des deux membres d'une inégalité par un même nombre, car la division par m revient à la multiplication par $\frac{1}{m}$.

106. Il n'est pas toujours permis d'élever au carré les deux membres d'une inégalité, il faut pour cela qu'ils soient positifs. On a, par exemple,

$$4 > -7$$
$$-3 > -9,$$

et, en élevant les deux membres au carré, on serait conduit aux inégalités

$$16 > 49,$$
$$9 > 81$$

qui sont inexactes.

On ne peut pas non plus extraire la racine carrée des deux membres d'une inégalité, à moins que l'on ne prenne les résultats positivement. Ainsi

$$A^2 > B^2$$

n'entraîne $$A > B$$

que si A est positif.

Digitized by Google

107. Quand on a deux inégalités qui ont lieu dans le même sens

$$A > B,$$
$$C > D;$$

si on les ajoute membre à membre, on obtient une nouvelle inégalité

$$A + C > B + D$$

qui est exacte, mais qui ne peut pas, comme lorsqu'il s'agit d'équations, remplacer une des deux proposées; en d'autres termes, les deux systèmes

$$\begin{cases} A > B \\ C > D \end{cases}$$

$$\begin{cases} A > B \\ A + C > B + D \end{cases}$$

ne sont pas équivalents. Le second est une conséquence du premier, mais le premier n'est pas une conséquence du second.

Inégalités du premier degré à une inconnue.

108. Une inégalité à une inconnue, est dite du premier degré quand elle peut se ramener à la forme

$$Ax + B > A'x + B',$$

A, B, A', B' désignant des nombres donnés. Pour trouver les valeurs de x qui y satisfont, je fais passer les termes d'un membre dans l'autre (**104**), de manière à lui donner la forme

$$(A - A')x > B' - B,$$

en divisant les deux membres par $A - A'$, on en déduira, suivant que cette différence sera positive ou négative

$$x > \frac{B' - B}{A - A'} \quad \text{ou} \quad x < \frac{B' - B}{A - A'}.$$

Il suffit donc, suivant le cas, de prendre x plus grand ou plus petit qu'une certaine limite. On peut remarquer que cette limite est précisément la valeur de x qui rendrait les deux membres égaux.

Digitized by Google

109. Nous résoudrons, comme application, la question suivante :

Deux points A *et* B *sont situés à une distance* 2c, *on sait qu'un point* M *est tel que* AM + MB = 2a, a *étant une ligne donnée, plus grande que* c, *entre quelles limites doit être comprise la distance* AM?

Supposons d'abord AM > BM, en nommant x et y ces deux lignes AM et BM, on a, d'après l'énoncé,

[1] $$x + y = 2a.$$

De plus, pour que le triangle AMB soit possible, il faut que le côté AB ou $2c$ soit moindre que la somme des deux autres et plus grand que leur différence, c'est-à-dire que l'on doit avoir

[2] $$2c < x + y,$$

[3] $$2c > x - y.$$

La première de ces inégalités est une conséquence nécessaire de [1] : on peut donc la supprimer. Quant à la seconde, si on y remplace x par sa valeur $2a - y$, elle devient

$$2a - y - y < 2c,$$

ou

$$2a - 2y < 2c,$$

qui équivaut à

$$y > a - c.$$

y étant plus grand que $a - c$, x, qui est égal à $2a - y$, et par conséquent d'autant plus petit que y est plus grand, doit être moindre que $2a - (a - c)$, c'est-à-dire que $a + c$.

On doit donc avoir

$$y > a - c$$
$$x < a + c,$$

y désignant le plus petit et x le plus grand des deux côtés AM et MB.

Inégalités du second degré.

110. Une inégalité est dite du second degré lorsqu'elle peut se mettre sous la forme

$$Ax^2 + Bx + C > 0,$$

ou

$$Ax^2 + Bx + C < 0,$$

A, B, C désignant des nombres donnés, et x le nombre inconnu dont il faut déterminer les limites.

On peut diviser les deux membres de cette inégalité par A, en en changeant le sens (105) si A est négatif, et la ramener ainsi à l'une des formes,

$$x^2+px+q>0,$$
$$x^2+px+q<0,$$

p et q désignant les rapports $\frac{A}{B}$ et $\frac{C}{A}$, qui peuvent être des nombres quelconques positifs ou négatifs.

Cherchons donc pour quelles valeurs de x, le trinome x^2+px+q est positif ou négatif.

Il convient de distinguer trois cas :

1° *L'équation* $x^2+px+q=0$ *a deux racines réelles et inégales.*

En nommant x' et x'' ces deux racines, on a alors (88) identiquement

$$x^2+px+q=(x-x')(x-x'').$$

Pour que x^2+px+q soit positif, il est donc nécessaire et suffisant que $x-x'$ et $x-x''$ soient de mêmes signes, c'est-à-dire, que x soit plus grand que la plus grande des deux racines ou plus petit que la plus petite.

Si x est compris entre les deux racines, les deux différences $x-x'$, $x-x''$ sont de signes contraires, et x^2+px+q est négatif.

2° *L'équation* $x^2+px+q=0$ *a ses deux racines égales.*

En nommant x' leur valeur commune, on a (88)

$$x^2+px+q=(x-x')^2;$$

et comme un carré ne peut jamais être négatif, l'inégalité

$$x^2+px+q<0$$

est impossible, et l'inégalité

$$x^2+px+q>0$$

est toujours satisfaite, pourvu que x soit différent de x'.

3° *L'équation* $x^2+px+q=0$ *a ses racines imaginaires.*

On a $$p^2-4q<0 \quad \text{ou} \quad \frac{p^2}{4}-q<0;$$

or, on a identiquement

$$x^2+px+q=x^2+px+\frac{p^2}{4}+q-\frac{p^2}{4}=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}.$$

x^2+px+q est donc la somme de deux parties positives, $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$ et $q-\frac{p^2}{4}$, et il ne peut ni s'annuler, ni devenir négatif.

L'inégalité $$x^2+px+q>0$$
est donc toujours satisfaite, et l'inégalité
$$x^2+px+q<0$$
est impossible.

EXEMPLE I. Soit l'inégalité
$$-3x^2-5x-\frac{4}{3}>0:$$
elle équivaut à
$$x^2+\frac{5}{3}x+\frac{4}{9}<0.$$

En égalant le premier membre à zéro, on trouve, pour racines, $-\frac{1}{3}$ et $-\frac{4}{3}$. Il faut donc, pour qu'il soit négatif, que x soit compris entre ces deux racines, c'est-à-dire il faut que
$$x<-\frac{1}{3},\quad x>-\frac{4}{3}.$$

EXEMPLE II. Soit encore l'inégalité
$$3x-x^2-7<0;$$
elle équivaut à $$x^2-3x+7>0;$$
or les racines de l'équation $x^2-3x+7=0$ étant imaginaires, l'inégalité proposée est satisfaite quel que soit x.

Discussion de quelques problèmes.

111. La théorie des inégalités sert fréquemment, dans la discussion des problèmes, à déterminer leurs conditions de possibilité; nous en donnerons quelques exemples.

Digitized by Google

Problème I. *Déterminer les côtés d'un triangle rectangle connaissant sa surface* m² *et son périmètre* 2p.

Soient x, y, z les côtés du triangle, z étant l'hypoténuse, on a, d'après l'énoncé, et en se servant de propositions très-connues,

[1] $$z^2 = x^2 + y^2,$$

[2] $$x + y + z = 2p,$$

[3] $$2m^2 = xy.$$

En multipliant par 2 les deux membres de la troisième équation, et l'ajoutant ensuite à la première, il vient

$$z^2 + 4m^2 = x^2 + y^2 + 2xy,$$

ou

[4] $$z^2 + 4m^2 = (x + y)^2.$$

La seconde, donne d'ailleurs l'équation

$$x + y = 2p - z,$$

d'où

[5] $$(x + y)^2 = (2p - z)^2.$$

En égalant les deux valeurs de $(x+y)^2$ fournies par les équations [4] et [5], il vient

$$(2p - z)^2 = z^2 + 4m^2,$$

ou, en effectuant l'élévation au carré indiquée dans le second membre, et supprimant le terme z^2 qui est commun,

$$4p^2 - 4pz = 4m^2;$$

d'où l'on déduit,

[6] $$z = \frac{4p^2 - 4m^2}{4p} = \frac{p^2 - m^2}{p}.$$

On voit, par cette valeur de z, que l'une des conditions de possibilité du problème est $p^2 > m^2$, mais cette condition ne suffit pas, il faut, en outre, que l'on trouve pour x et y des valeurs positives et réelles. Or, z étant connu, les équations [2] et [3] font connaître $x + y$ et xy, et donnent

$$x + y = 2p - z = \frac{p^2 + m^2}{p},$$

$$xy = 2m^2;$$

x et y sont, par conséquent, racines de l'équation

$$u^2 - \frac{p^2 + m^2}{p} u + 2m^2 = 0.$$

On voit, à l'inspection de cette équation, que les racines sont positives si elles sont réelles. Il suffit donc d'exprimer qu'elles sont réelles, c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{(p^2+m^2)^2}{4p^2} - 2m^2 > 0;$$

ou, ce qui revient au même, puisque $4p^2$ est positif,

$$(p^2+m^2)^2 > 8p^2m^2;$$

ou, en extrayant la racine carrée des deux membres, ce qui est permis, puisqu'ils sont positifs,

[7] $$p^2+m^2 > 2pm\sqrt{2}.$$

Telle est la condition à laquelle p et m doivent satisfaire; on peut en déduire les limites entre lesquelles peut varier p pour une valeur donnée de m, ou m pour une valeur de p. Nous obtiendrons ces deux résultats à la fois, en posant $\frac{p}{m}=r$. Si, en effet, l'on divise par m^2 les deux membres de l'inégalité [7], elle devient

$$r^2+1 > 2r\sqrt{2},$$

ou $$r^2-2r\sqrt{2}+1 > 0;$$

d'où l'on conclut (**110**) que r doit être plus grand que la plus grande racine de l'équation $r^2-2r\sqrt{2}+1=0$, ou plus petit que la plus petite, c'est-à-dire plus grand que $\sqrt{2}+1$, ou plus petit que $\sqrt{2}-1$. Mais p étant, comme on l'a vu, plus grand que m, le rapport $\frac{p}{m}$ ne peut pas être moindre que $\sqrt{2}-1$; il faut donc qu'il soit plus grand que $\sqrt{2}+1$; et telle est la condition de possibilité du problème.

Remarque. Le triangle rectangle dont le périmètre est $2p$, et la surface m^2 n'est possible que si $\frac{p}{m}$ est plus grand que $\sqrt{2}+1$;

et par suite $$m < \frac{p}{\sqrt{2}+1},$$

$$p > m(\sqrt{2}+1).$$

Ces inégalités fournissent les solutions des questions suivantes:

Quelle est la plus grande surface que puisse avoir un triangle rectangle de périmètre donné?

Quel est le plus petit périmètre que puisse avoir un triangle rectangle de surface donnée?

PROBLÈME II. *Inscrire dans une sphère de rayon* R *un cylindre dont la surface totale, y compris les deux faces, soit équivalente à un cercle de rayon donné,* πm^2.

En nommant x le rayon de base et y la hauteur du cylindre, la géométrie fournit immédiatement les équations suivantes :

$$[1] \qquad x^2 + \frac{y^2}{4} = R^2,$$

$$2\pi x^2 + 2\pi xy = \pi m^2;$$

ou en supprimant le facteur π.

$$[2] \qquad 2x^2 + 2xy = m^2.$$

On déduit de [2] $\quad y = \frac{m^2 - 2x^2}{2x};$

et, en substituant dans [1],

$$x^2 + \frac{(m^2 - 2x^2)^2}{16x^2} = R^2;$$

ou, chassant les dénominateurs et réduisant les termes semblables,

$$20x^4 - (4m^2 + 16R^2)x^2 + m^4 = 0,$$

d'où l'on déduit

$$[3] \qquad x = \sqrt{\frac{4m^2 + 16R^2 \pm \sqrt{(4m^2 + 16R^2)^2 - 80m^4}}{40}}.$$

A la seule inspection de l'équation bicarrée qui donne les valeurs de x^2, on s'aperçoit que si les racines sont réelles, elles sont toutes deux positives, et fournissent par conséquent chacune une valeur réelle de x. Mais il ne suffit pas que x soit réel et positif, il faut que y aussi le soit; par suite on doit avoir

$$m^2 - 2x^2 > 0,$$

$$x < \frac{m}{\sqrt{2}}.$$

Digitized by Google

Le problème aura donc autant de solutions qu'il y aura de valeurs de x fournies par la formule [4], et satisfaisant à cette condition.

Pour que les deux valeurs de x conviennent, il faut d'abord qu'elles soient réelles ; il suffit pour cela, comme nous l'avons dit, que celles de x^2 le soient, ce qui exige seulement l'inégalité,

$$(4m^2 + 16R^2)^2 > 80m^4,$$

ou

$$4m^2 + 16R^2 > 4\sqrt{5}\,.m^2,$$

c'est-à-dire

$$[4] \qquad m^2 < \frac{16R^2}{4(\sqrt{5}-1)} < \frac{4R^2}{\sqrt{5}-1}.$$

Cette condition étant remplie, cherchons dans quel cas les valeurs de x satisfont toutes les deux ; il faut, pour cela, qu'elles soient moindres que $\frac{m}{\sqrt{2}}$; et il suffit évidemment d'exprimer que la plus grande remplit cette condition et que l'on a,

$$\frac{m^2}{2} > \frac{4m^2 + 16R^2 + \sqrt{(4m^2 + 16R^2)^2 - 80m^4}}{40},$$

ou, en chassant les dénominateurs et réduisant,

$$16(m^2 - R^2) > \sqrt{(4m^2 + 16R^2)^2 - 80m^4}.$$

Si m est moindre que R, cette inégalité est impossible, et il ne peut pas, par conséquent, exister deux solutions.

Si m est plus grand que R, les deux membres de l'inégalité étant positifs, on peut les élever au carré après les avoir divisés l'un et l'autre par 4, il vient ainsi

$$16(m^2 - R^2)^2 > (m^2 + 4R^2)^2 - 5m^4,$$

ou

$$20m^4 - 40m^2R^2 > 0,$$

c'est-à-dire

$$m^2 > 2R^2.$$

D'ailleurs, pour que x soit réel, on doit avoir

$$m^2 < \frac{4R^2}{\sqrt{5}-1}.$$

Digitized by Google

Il faut donc, pour qu'il y ait deux solutions, que m^2 soit compris entre $2R^2$ et $\frac{4R^2}{\sqrt{5}-1}$.

Un calcul facile prouverait que la plus petite valeur de x satisfait dans tous les cas, et fournit une solution du problème toutes les fois qu'elle est réelle.

REMARQUE. On peut se rendre compte, de la manière suivante, des résultats que nous venons d'obtenir.

Si l'on examine les valeurs successives par lesquelles passe la surface d'un cylindre inscrit dans une sphère lorsque le rayon de la base augmente depuis 0 jusqu'au rayon r de la sphère, on voit que cette surface, d'abord nulle, augmente jusqu'à une limite que le calcul fait connaître, et qui, d'après ce qui précède, est $\frac{4\pi R^2}{\sqrt{5}-1}$; puis elle diminue jusqu'à la valeur $2\pi R^2$, qui correspond au cas où la hauteur étant nulle, le cylindre se réduit à ses deux bases qui sont deux grands cercles. Or, en augmentant depuis zéro jusqu'au maximum pour diminuer depuis le maximum jusqu'à $2\pi R^2$, il est évident que la surface du cylindre passe deux fois par toutes les valeurs comprises entre le maximum et $2\pi R^2$, et une seule fois par celles qui sont moindres que $2\pi R^2$.

RÉSUMÉ.

102. Définition des expressions plus grand que, plus petit que, quand il s'agit des nombres négatifs. — **103**. Ce qu'on entend par résoudre une inégalité. — **104**. On peut ajouter ou retrancher un nombre quelconque aux deux membres d'une inégalité. — **105**. On peut aussi multiplier les deux membres d'une inégalité par un nombre positif. Si on les multiplie par un nombre négatif, il faut changer le sens de l'inégalité. — **106**. On ne peut pas toujours élever au carré ni extraire la racine carrée des deux membres d'une inégalité. — **107**. On peut ajouter deux inégalités qui ont lieu dans le même sens, mais le résultat ne peut pas remplacer l'une d'elles. — **108**. Inégalités du premier degré à une inconnue. — **109**. Connaissant la base d'un triangle et la somme de ses côtés; trouver entre quelles limites sont compris ces côtés. — **110**. Inégalités du second degré; la question se ramène toujours à savoir pour quelles valeurs de x le trinome x^2+xp+q est positif ou négatif. On doit distinguer trois cas : 1° Si le trinome x^2+px+q égalé à zéro a les racines réelles ,

il est négatif lorsque x est compris entre les racines, et positif dans le cas contraire; 2° Si les racines sont égales, le trinome peut s'annuler, mais ne devient jamais négatif; 3° Si elles sont imaginaires, il ne peut ni s'annuler ni devenir négatif. — **111**. Application de la théorie précédente à la discussion de quelques problèmes.

EXERCICES.

I. Déduire de l'inégalité,

$$\frac{x+a}{\sqrt{a^2+x^2}} > \frac{x+b}{\sqrt{b^2+x^2}},$$

les limites entre lesquelles x doit être compris, a étant plus grand que b.

II. Conditions nécessaires pour que l'inégalité

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F > 0$$

soit satisfaite, quels que soient x et y.

III. Conditions pour que l'inégalité

$$\begin{aligned} &Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2B''xy + 2B'xz + 2Byz \\ &+ 2Cx + 2C'y + 2C''z + D > 0, \end{aligned}$$

soit satisfaite, quels que soient x, y et z.

IV. Mener d'un point à un cercle une sécante de longueur donnée, et chercher les conditions de possibilité. On donne la perpendiculaire b abaissée de ce point sur un diamètre du cercle, la distance a du pied de cette perpendiculaire au centre, et le rayon R du cercle.

V. On donne un point O et un cercle dont le centre est en C, et le rayon égal à R. La polaire du point O est une perpendiculaire à OC menée par un point X de cette droite, tel que $CX . OC = R^2$. Deux cercles étant donnés, trouver si un point de leur plan peut avoir même polaire dans l'un et dans l'autre.

VI. $\sqrt[m+n+p+q]{abcd}$ est compris entre la plus grande et la plus petite des expressions $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[p]{c}$, $\sqrt[q]{d}$.

VII. On a toujours

$$a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \ldots < \sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots}\ \sqrt{\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \ldots};$$

à moins que $\quad \frac{a}{\alpha} = \frac{a'}{\alpha'} = \frac{a''}{\alpha''} \ldots,$

VIII. $x^5 + y^5 - x^4y - y^4x$ est toujours positif, quelles que soient les valeurs positives ou négatives de x et de y.

IX. $3(1 + a^2 + a^4)$ est plus grand que $(1 + a + a^2)^2$, quelles que soient les valeurs, positives ou négatives, de a.

X. abc est plus grand que $(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)$, quels que soient les nombres positifs a, b, c.

XI. $ab(a + b) + ac(a + c) + bc(b + c) > 6abc$, quels que soient les nombres positifs a, b, c.

XII. Quels que soient les nombres positifs a_1, a_2, $a_3 \ldots a_n$, prouver que

$$\frac{n-1}{2}(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) > \sqrt{a_1a_2} + \sqrt{a_1a_3} + \sqrt{a_2a_3} + \text{etc.} \ldots$$

CHAPITRE XI.

QUELQUES QUESTIONS DE MAXIMUM OU MINIMUM.

---

112. Lorsqu'on cherche à rendre une grandeur égale à une quantité donnée, le problème n'est souvent possible que sous certaines conditions. Dans la plupart des cas, il faut que la quantité donnée soit comprise entre certaines limites que la discussion fait connaître. Ces limites déterminent la plus grande et la plus petite valeur que l'on puisse attribuer à la grandeur considérée, c'est-à-dire le *maximum* et le *minimum* de cette grandeur. On en a vu des exemples dans le chapitre précédent; nous en ajoutons ici quelques autres, en y joignant la solution de quelques questions de maxima et minima qui se résolvent d'une manière moins directe.

113. PROBLÈME I. *La somme de deux nombres* x *et* y *étant donnée et égale à* 2a, *entre quelles limites peut varier leur produit ?*

Nommons p le produit des deux nombres x et y, cherchons à les déterminer : nous verrons ensuite quelles conditions p doit remplir pour que le problème soit possible.

On a

[1] $$x + y = 2a,$$

[2] $$xy = p,$$

x et y sont donc les racines de l'équation

[3] $$z^2 - 2az + p = 0,$$

et leurs valeurs sont réelles (82), si l'on a

$$a^2 > p,$$

a^2 est donc la limite que p ne peut surpasser et, par conséquent, le maximum du produit xy. Il n'y a pas de minimum.

Si l'on suppose $p = a^2$, l'équation [3] a ses deux racines égales à a; le produit maximum correspond donc au cas où x et y sont égaux à a.

Du résultat précédent, on peut en déduire plusieurs autres qu'il ne serait pas aussi facile d'obtenir directement.

114. THÉORÈME. *La somme de plusieurs nombres positifs étant donnée, leur produit est le plus grand possible quand ils sont tous égaux.*

Les nombres considérés étant tous moindres que la somme donnée, leur produit ne peut surpasser toute limite, il est donc susceptible d'un certain maximum.

Soit
$$abc \ldots l$$
ce maximum. Je dis que les facteurs a, b, ... l ne peuvent être inégaux, car si deux d'entre eux, a et b par exemple, étaient différents, on pourrait, sans altérer leur somme, les remplacer, l'un et l'autre, par $\frac{a+b}{2}$, ce qui augmenterait leur produit puisque (**113**), la somme étant constante, le produit est le plus grand possible quand les facteurs sont égaux. On aurait donc

$$abc \ldots kl < \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b}{2} c \ldots kl,$$

et par suite, $abc \ldots kl$ n'est pas le plus grand produit que l'on puisse faire avec des facteurs ayant la somme donnée.

115. REMARQUE. Nous supposons, dans le raisonnement précédent, que a, b, ... k, l ... soient des nombres positifs. S'il n'en était pas ainsi, le produit n'aurait pas de maximum, car la somme des facteurs restant la même, leur valeur absolue pourrait augmenter sans limite, et si les facteurs négatifs étaient en nombre pair, le produit serait positif et aussi grand qu'on le voudrait.

116. PROBLÈME II. *La somme de deux nombres positifs* x, y *étant donnée, trouver le maximum du produit* $x^m y^n$, m *et* n *étant des nombres entiers donnés.*

Le maximum cherché correspond aux mêmes valeurs de x et de y que celui de

$$\left(\frac{x}{m}\right)^m \left(\frac{y}{n}\right)^n,$$

car cette expression ne diffère de la première que par un facteur constant $\frac{1}{m^m n^n}$: mais ce nouveau produit, peut être considéré comme composé de $m+n$ facteurs

$$\frac{x}{m}, \frac{x}{m} \cdots \frac{x}{m} \quad \frac{y}{n}, \frac{y}{n} \cdots \frac{y}{n},$$

dont la somme

$$m\frac{x}{m}+n\frac{y}{n} \quad \text{ou} \quad x+y$$

est donnée. Le produit sera donc le plus grand possible, (114), si les facteurs sont égaux, c'est-à-dire si l'on a

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n};$$

cette relation permettra de déterminer x et y, puisque l'on connaît, par hypothèse, la somme $x+y$.

117. Problème III. *On donne le produit* p *de deux nombres positifs. Trouver le minimum de leur somme.*

Je dis que la somme sera minima lorsque les deux nombres seront égaux à $\sqrt{p}$, et leur somme égale, par conséquent, à $2\sqrt{p}$.

En effet, le plus grand produit possible de deux nombres qui ont pour somme $2\sqrt{p}$ est égal (113) à $\sqrt{p}\cdot\sqrt{p}$ ou à p. Donc : si deux nombres ont pour somme $2\sqrt{p}$, leur produit est, au plus, égal à p.

Il est évident, d'après cela, que si les deux nombres ont une somme moindre que $2\sqrt{p}$, leur produit est moindre que p ; il faut donc, pour que le produit de deux nombres soit p, que leur somme ne soit pas moindre que $2\sqrt{p}$; $2\sqrt{p}$ est, par suite, la plus petite valeur que cette somme puisse avoir.

118. Problème IV. *On donne le produit* p *de* n *nombres positifs. Trouver le minimum de leur somme.*

Je dis que la somme sera minima lorsque tous les nombres seront égaux à $\sqrt[n]{p}$.

En effet, le plus grand produit possible de n nombres qui ont, pour somme, $n\sqrt[n]{p}$ est (114) $(\sqrt[n]{p})^n$ ou p.

Digitized by Google

Donc, si n nombres ont une somme égale à $n\sqrt[n]{p}$, leur produit ne peut surpasser p.

A fortiori, si n nombres ont une somme moindre que $n\sqrt[n]{p}$, leur produit sera moindre que p.

D'après cela, pour que le produit de n nombres soit p, il faut que leur somme ne soit pas moindre que $n\sqrt[n]{p}$, et $n\sqrt[n]{p}$ est par conséquent, la valeur minima de cette somme.

119. Problème V. *On donne le produit* $x^m y^n = p$. *Trouver le minimum de* $x + y$.

Je dis que ce minimum correspondra au cas où $\frac{x}{m} = \frac{y}{n}$. Soient, en effet, α et β deux nombres tels que

$$\alpha^m \beta^n = p,$$

$$\frac{\alpha}{m} = \frac{\beta}{n}.$$

Parmi tous les nombres x et y qui ont pour somme $\alpha + \beta$ (**116**), α et β sont ceux qui donnent au produit $x^m y^n$ la plus grande valeur. Si donc deux nombres x et y ont une somme moindre que $\alpha + \beta$, le produit $x^m y^n$ sera, *à fortiori*, moindre que $\alpha^m \beta^n$, c'est-à-dire que p. Par suite, pour que $x^m y^n$ soit égal à p, il faut que $x + y$ soit au moins égal à $\alpha + \beta$, qui est, par conséquent, sa valeur minima.

120. Remarque. Les trois problèmes précédents (**117**), (**118**), (**119**) sont, en quelque sorte, réciproques de ceux que nous avons résolus en commençant ce chapitre (**113**), (**114**), (**115**). Cette réciprocité entre certains problèmes de maximum et minimum peut être formulée, comme il suit, d'une manière générale.

Si, une quantité B étant donnée, une autre quantité A est maxima, *dans certaines circonstances*; A, étant donné, B sera minima *dans les mêmes circonstances, pourvu* que la valeur maxima de A, diminue lorsque la valeur donnée de B diminue elle-même.

Admettons, en effet, que A_1 soit la plus grande valeur de A qui puisse se concilier avec la valeur B_1 de B. *A fortiori*, une valeur de B moindre que B_1 exigerait que A fût moindre que A_1, puisque, par hypothèse, le maximum de A est d'autant moindre que la valeur de B est plus petite. La valeur A_1 de A ne peut, d'après cela, correspondre qu'à des valeurs

Digitized by Google

de B au moins égales à B_1, et B_1 est, en d'autres termes, la moindre valeur de B qui corresponde à $A=A_1$, c'est-à-dire le minimum de B, correspondant à la valeur A_1 de A.

Exemples. On démontre en géométrie

Que le cercle est la courbe qui, sous une longueur donnée, renferme la plus grande surface;

Que le triangle équilatéral est le triangle qui, sous un périmètre donné, contient la plus grande surface.

Il en résulte :

Que le cercle est la courbe qui, avec une aire donnée, a le plus petit périmètre;

Que le triangle équilatéral est le triangle qui, avec une aire donnée, admet le plus petit périmètre.

121. Nous appliquerons la méthode générale qui a fourni le théorème I, à des questions un peu plus composées.

Problème VI. y *et* x *étant deux variables liées entre elles par une équation du second degré*

$$[1] \qquad ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0,$$

trouver les valeurs extrêmes que puisse prendre l'une d'elles, x *par exemple.*

Si on résout l'équation [1] par rapport à y, on aura

$$[2] \quad y=\frac{-bx+d}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{(bx+d)^2-4a(cx^2+ex+f)};$$

la quantité sous le radical est un trinome du second degré que nous pouvons remplacer par mx^2+nx+q; m, n, q étant des quantités connues dont on formera facilement l'expression, savoir :

$$m=b^2 \quad -4ac$$
$$n=2bd-4ae$$
$$q=d^2 \quad -4af,$$

et l'on aura

$$[3] \qquad y=\frac{-bx+d}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{mx^2+nx+p}.$$

Or, il est évident que l'on ne pourra donner à x que les valeurs

qui rendent mx^2+nx+p positif, car, sans cela, y serait imaginaire; x doit donc satisfaire à l'inégalité

$$[4] \qquad mx^2+nx+p>0,$$

et on a vu (**110**) comment on peut, dans les différents cas, déduire de l'inégalité [4] les limites entre lesquelles x doit être ou ne doit pas être comprise.

Problème VII. *La somme* $x+y$ *étant donnée et égale à* $2a$, *entre quelles limites peut varier* x^3+y^3?

Désignons x^3+y^3 par s^3, et cherchons à déterminer x et y, nous verrons quelle condition s^3 doit remplir pour que le problème soit possible; on a

$$[1] \qquad x+y=2a$$

$$[2] \qquad x^3+y^3=s^3,$$

on déduit de [1] $\qquad y=2a-x,$

et, en substituant cette valeur dans [2],

$$[3] \qquad x^3+(2a-x)^3=s^3,$$

ou, en développant

$$[4] \qquad x^3+8a^3-12a^2x+6ax^2-x^3=s^3,$$

et, en supprimant les termes x^3 et $-x^3$ qui se détruisent, et ordonnant par rapport à x,

$$[5] \qquad 6ax^2-12a^2x+8a^3=s^3;$$

on en déduit

$$[6] \qquad x=a\pm\frac{1}{12a}\sqrt{144a^4-24a(8a^3-s^3)},$$

et, pour que le problème soit possible, il faut que l'on ait

$$144a^4-24a(8a^3-s^3)>0;$$

si a est positif, nous pouvons supprimer le facteur $24a$, et il vient

$$6a^3-8a^3+s^3>0,$$

d'où l'on déduit

$$s^3>2a^3;$$

telle est donc la seule condition imposée à la somme s^3, puisque, x étant réelle, l'équation [1] fournira toujours une valeur réelle pour y.

Le minimum demandé est, par conséquent, $2a^3$.

Il est facile de voir que l'hypothèse $s^3=2a^3$, introduite dans l'équation [6], donne $x=a$, et que l'on a, par suite, $y=a$. La somme x^3+y^3 est donc minimum quand x et y sont égaux entre eux.

RÉSUMÉ.

112. Définition du maximum et du minimum des grandeurs assujetties à certaines conditions. — 113. Maximum du produit de deux nombres lorsque leur somme est donnée. — 114. Extension du résultat au cas d'un nombre quelconque de facteurs positifs. — 115. Si l'on donnait la somme de plusieurs nombres sans les assujettir à être positifs, le produit pourrait croitre sans limite. — 116. $x+y$ étant donné, x^my^n est maximum quand on a $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}$. — 117. Connaissant le produit de deux nombres positifs, trouver le minimum de leur somme. — 118. Extension au cas d'un nombre quelconque de facteurs. — 119. Connaissant x^my^n, trouver le minimum de $x+y$. — 120. Remarque sur un certain genre de réciprocité entre des questions de maximum ou de minimum. — 121. Solution de deux problèmes de maxima et minima.

EXERCICES.

I. x et y étant donnés, la règle qui fournit le maximum de x^my^n s'étend au cas de m et n fractionnaires.

II. Minimum de

$$x^m+\frac{1}{x^n},$$

m et n étant entiers ou fractionnaires et x positif.

III. x^my^n étant donné, $x^{m'}y^{n'}$ est-il susceptible de maximum ou de minimum, m, n, m', n' étant donnés, et x et y assujettis à être positifs?

IV. Parmi les parallélipipèdes rectangles de mêmes surfaces, quel est celui qui a le plus grand volume, et parmi ceux de même volume, lequel a la plus petite surface?

Digitized by Google

V. Quelle est la zone sphérique, à une base, qui contient le plus grand volume parmi celles de même surface, et la zone de plus petite surface parmi celles qui contiennent même volume?

VI. Quel est le plus grand cylindre inscrit dans une sphère donnée, et parmi les cylindres de même volume, celui qui est inscrit dans la plus petite sphère?

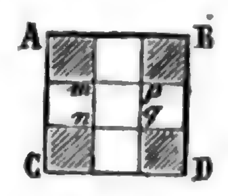
VII. Valeur minima de $\frac{tang\,3a}{tang^3\,a}$ lorsque a varie de 0 à 30°.

VIII. Deux corps de masses m et m' animés, dans le même sens, de vitesses v et v' viennent à se choquer. Trouver les vitesses qu'ils prendront après le choc, d'après la condition que la somme des produits obtenus en multipliant chaque masse par le carré du changement de vitesse soit la moindre possible.

IX. On marque sur une droite des points équidistants que l'on numérote 1, 2, 3 ... n. Trouver sur la droite, un point tel que la somme des carrés de ses distances aux points donnés multipliées par le numéro correspondant soit un minimum.

X. Même question, en supposant que les points soient numérotés 1, 3, 6, 10 ... $\frac{n(n+1)}{2}$.

XI. On donne une feuille de carton carrée



aux quatre coins de laquelle on supprime des carrés égaux qui sont ombrés dans la figure ci-jointe. Déterminer le côté de ces carrés par la condition que la boîte qui aurait pour fond $mnpq$ et pour faces latérales les rectangles restants qui ont tous même hauteur ait un volume maximum.

XII. Minimum de $$a^{x^3} b^{\frac{1}{x^2}},$$
a et b étant deux nombres positifs donnés.

XIII. Maximum de $\frac{(x+a)(x-b)}{x^2}$, a et b étant donnés.

XIV. Minimum de $a+x+\frac{(a+x)^2}{a-x}$.

XV. Minimum de $\frac{a+x}{a-x}+\frac{a-x}{a+x}$.

XVI. Quelles valeurs doit-on donner à x et y pour que la valeur de a, déduite de l'équation

$$x^2-2axy+y^2+2ax-2y+4a=o,$$

soit la plus petite possible?

CHAPITRE XII.

DIVISION DES POLYNOMES.

Des divisions qui peuvent s'effectuer.

122. Dans un grand nombre de cas, pour indiquer la division de deux polynomes, on se borne à les séparer par une barre horizontale, et il est impossible de transformer l'opération en une autre plus simple.

Lorsque cependant, le dividende et le diviseur contiennent une même lettre, on peut, *quelquefois,* mettre leur quotient sous la forme d'un nouveau polynome. Nous supposerons ici que les polynomes soient ordonnés suivant les puissances décroissantes d'une même lettre, et nous chercherons, *s'il est possible,* à représenter leur quotient par un polynome ordonné de la même manière : c'est ce qu'on appelle *effectuer la division.*

Le procédé de division repose sur les théorèmes suivants :

123. Théorème I. *Si deux polynomes sont ordonnés suivant les puissances décroissantes d'une même lettre, et que le quotient de leur division soit égal à un polynome ordonné de la même manière, le premier terme de ce quotient, est le quotient de la division du premier terme du dividende par le premier terme du diviseur.*

Le quotient, multiplié par le diviseur, doit, en effet, reproduire le dividende; or, le premier terme du produit de deux polynomes provient, sans réduction (**26**), du produit des premiers termes de chacun d'eux. Le premier terme du dividende est donc le produit du premier terme du quotient par le premier terme du diviseur, et le premier terme du quotient résulte, par conséquent, de la division du premier terme du dividende par le premier terme du diviseur.

Digitized by Google

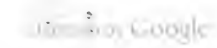
124. Théorème II. *Si l'on multiplie le diviseur par le premier terme du quotient, que l'on retranche le produit du dividende, on obtiendra un reste qui, divisé par le diviseur, donnera pour résultat l'ensemble des autres termes du quotient.*

Le dividende est égal, en effet, au produit du diviseur par le quotient. Si donc on en retranche le produit du diviseur par un des termes du quotient, le reste sera le produit du diviseur par la somme des autres termes du quotient : cette somme sera, par suite, le quotient de la division de ce reste par le diviseur. On peut remarquer (**24**) que le premier terme du quotient sera positif ou négatif suivant que le premier terme du dividende et le premier terme du diviseur auront ou n'auront pas le même signe.

125. Les deux théorèmes précédents permettent de faire une division quelconque, car ils donnent le moyen de trouver le premier terme du quotient, et ramènent la recherche de tous les autres à une division nouvelle. Les mêmes théorèmes appliqués à cette division nouvelle permettent de trouver le premier terme du nouveau quotient, c'est-à-dire le second du quotient cherché, et de ramener la recherche des suivants à une troisième division, et ainsi de suite.

126. Remarque. Les raisonnements qui précèdent supposent, essentiellement, que le quotient puisse s'exprimer par un polynome. On peut voir, du reste, que le procédé auquel ils conduisent apprendra, dans tous les cas, si réellement il en est ainsi. La condition nécessaire et suffisante est que l'un des termes du quotient, multiplié par le diviseur, donne un produit précisément égal au dividende partiel qui l'a fourni. 1° Cette condition est nécessaire, car après avoir trouvé tous les termes du quotient, et retranché successivement du dividende le produit de chacun d'eux par le diviseur, on doit trouver un reste nul. 2° Cette condition est suffisante, car si elle est remplie, le dividende est égal à la somme des produits du diviseur par les termes trouvés au quotient, puisque, en retranchant successivement ces produits, il ne reste rien.

Dans le cas où les opérations ne doivent jamais s'arrêter, il est important d'examiner comment on pourra s'assurer qu'il en est ainsi, et, à quel moment, on peut affirmer qu'aucun


Digitized by Google

polynome ne peut représenter le quotient. Remarquons, pour y parvenir, que, lorsqu'une division peut s'effectuer, le dividende étant le produit du diviseur par le quotient, le dernier terme du dividende est le produit du dernier terme du diviseur par le dernier du quotient. De là résulte, que l'on peut déterminer, immédiatement, le dernier terme du quotient, en divisant le dernier terme du dividende par le dernier du diviseur. Lors donc qu'en formant les termes successifs du quotient, on en trouvera un de degré moindre que le terme ainsi calculé, on pourra affirmer que l'opération ne se termine pas.

On donne quelquefois une autre règle, en disant qu'il faut regarder l'opération comme terminée quand on est conduit à mettre au quotient un terme dont l'exposant soit négatif. Cette règle n'est exacte que si l'on veut s'imposer la condition de n'admettre que des exposants positifs. Mais cette restriction est presque toujours sans utilité.

127. Exemple. Soit à diviser $x^5+6x^4+4x^3-4x^2+x-1$ par x^2+x-1, on écrira, comme il suit, le diviseur à la gauche du dividende, en les séparant par une barre verticale :

$$\begin{array}{r|l} x^5+6x^4+4x^3-4x^2+x-1 & x^2+x-1 \\ \cline{2-2} 5x^4+5x^3-4x^2+x-1 & x^3+5x^2+1 \\ x^2+x-1 & \\ 0 & \end{array}$$

Le premier terme du quotient est x^3, quotient de la division de x^5 par x^2.

On multiplie le diviseur par x^3, et l'on retranche le produit du dividende, en soustrayant chaque terme du produit, du terme de degré égal, dans le dividende, au fur et à mesure que l'on fait la multiplication. On trouve, ainsi, pour reste, un premier dividende partiel

$$5x^4+5x^3-4x^2+x-1.$$

Le second terme du quotient est $5x^2$, quotient de la division de $5x^4$ par x^2.

Si on multiplie $5x^2$ par le diviseur, et que l'on retranche le produit du dividende partiel, on obtient pour reste un second dividende partiel x^2+x-1.

Le troisième terme du quotient est 1, quotient de la division

Digitized by Google

de x^3 par x^2. Si on multiplie le diviseur par 1, et que l'on retranche le produit du dividende partiel précédent, on obtient pour reste 0. La division se fait donc exactement, et le quotient est x^3+5x^2+1.

Exemple II. Diviser $x^5+5x^4+2x^3$ par x^2+x.

$$\begin{array}{r|l} x^5+5x^4+2x^3 & x^2+x \\ \cline{2-2} 4x^4+2x^3 & x^3+4x^2 \end{array}$$

Le premier terme du quotient est x^3, quotient de la division de x^5 par x^2. On multiplie x^3 par le diviseur, et l'on retranche le produit du dividende : le reste est

$$4x^4+2x^3.$$

$4x^4$, divisé par x^2, donne pour quotient $4x^2$, qui devrait être le second terme du quotient. Mais, sans aller plus loin, on voit que l'opération ne réussira pas, car le dernier terme du quotient (125) devrait être le quotient de la division de $2x^3$ par x, c'est-à-dire $2x^2$, et, par suite, s'il existe un quotient exact, le terme $4x^2$ ne peut en faire partie.

128. Remarque. Les règles précédentes ne supposent nullement que les puissances de la lettre ordonnatrice aient des coefficients numériques. Ces coefficients peuvent être littéraux et même composés de plusieurs termes, sans qu'il y ait rien à changer aux règles ou aux raisonnements.

Exemple. Diviser

$$x^6+(a^2-2c^2)x^4-(a^4-c^4)x^2-a^6-2a^4c^2-a^2c^4 \quad \text{par} \quad x^2-a^2-c^2.$$

$$\begin{array}{r|l} x^6+(a^2-2c^2)x^4-(a^4-c^4)x^2-a^6-2a^4c^2-a^2c^4 & x^2-a^2-c^2 \\ \cline{2-2} (2a^2-c^2)x^4-(a^4-c^4)x^2-a^6-2a^4c^2-a^2c^4 & x^4+(2a^2-c^2)x^2+a^4+a^2c^2. \\ (a^4+a^2c^2)x^2-a^6-2a^4c^2-a^2c^4 & \end{array}$$

Le premier terme du quotient est le quotient de la division de x^6 par x^2, ou x^4. On multiplie x^4 par le diviseur, et l'on retranche le produit du dividende : il reste

$$(2a^2-c^2)x^4-(a^4-c^4)x^2-a^6-2a^4c^2-a^2c^4.$$

Le second terme du quotient est $(2a^2-c^2)x^2$, quotient de la division de $(2a^2-c^2)x^4$ par x^2. On multiplie le diviseur par $(2a^2-c^2)x^2$,

Digitized by Google

et l'on retranche le produit du dividende : il reste

$$(a^4+a^2c^2)x^2-a^6-2a^4c^2-a^2c^4.$$

Le troisième terme du quotient est $a^4+a^2c^2$, quotient de la division de $(a^4+a^2c^2)x^2$ par x^2. Le produit de $a^4+a^2c^2$ par le diviseur étant retranché du dernier dividende partiel laisse pour reste 0; la division se fait donc exactement et le quotient est

$$x^4+(2a^2-c^2)x^2+a^4+a^2c^2.$$

EXEMPLE II. Soit à diviser

$$(a^4-b^4)x^4+(a^2b^3-a^3b^2-a^4b-b^4a)x^3+(a^2b^4-a^4b^2+a^3b^3+b^6+a^6)x^2 \\ -(a^5b^2+b^5a^2)x+b^4a^4$$

par $$(a^2+b^2)x^2-a^2bx+a^4.$$

Le premier terme du quotient est

$$\frac{(a^4-b^4)x^4}{(a^2+b^2)x^2}=\frac{a^4-b^4}{a^2+b^2}x^2=(a^2-b^2)x^2;$$

en continuant l'opération, on verra que le calcul de chaque terme du quotient exige la division de deux polynomes algébriques ordonnés par rapport à a, le diviseur étant toujours a^2+b^2, et l'on trouvera, en effectuant les calculs, que le quotient est

$$(a^2-b^2)x^2-ab^2x+b^4.$$

Des divisions qui ne peuvent se faire exactement.

129. Lorsque deux polynomes n'ont pas pour quotient un troisième polynome, on dit qu'ils ne sont pas divisibles l'un par l'autre. On peut néanmoins, dans ce cas, donner, en général, à l'expression de leur rapport, une forme plus simple que celle qui résulterait de la seule indication de l'opération. Nous allons démontrer, en effet, le théorème suivant :

Si deux polynomes entiers A *et* B *contiennent une même lettre* x, *on peut toujours mettre le rapport* $\frac{A}{B}$ *sous la forme d'un polynome* Q *entier par rapport à* x, *augmenté d'une fraction* $\frac{R}{B}$ *ayant*

Digitized by

même dénominateur que $\frac{A}{B}$ *et pour numérateur un polynome* R *de degré moindre en* x *que* B.

Appliquons, en effet, aux deux polynomes A et B, la méthode de division exposée (124), jusqu'à ce que l'on trouve un reste de degré moindre que B. On obtiendra, au quotient, différents termes dont les exposants seront tous positifs, car les dividendes partiels qui les fournissent sont tous de degré supérieur à B, et leur premier terme contient, par suite, x à un degré plus élevé que le premier terme de B.

Soit Q l'ensemble des termes obtenus lorsque l'on parvient à un dividende partiel, R, de degré moindre que B. R est ce qui reste du dividende A, lorsqu'on en retranche successivement le produit de B par les divers termes de Q; il est donc égal à $A - BQ$, et l'on a

$$A = BQ + R,$$

d'où

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B};$$

le quotient $\frac{A}{B}$ est donc mis sous la forme annoncée.

130. On peut prouver, de plus, que la transformation précédente ne peut se faire que d'une seule manière. Si, en effet, l'on avait à la fois

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B},$$

$$\frac{A}{B} = Q' + \frac{R'}{B},$$

on en conclurait, en retranchant

$$0 = (Q - Q') + \frac{(R - R')}{B}$$

ou

$$(R - R') = (Q' - Q)B;$$

or, cette dernière égalité est impossible, car le premier membre contient x à un degré moindre que le second, puisque R et R' étant, par hypothèse, de degrés moindres que B, il en est de même de leur différence, et le produit de B, par le polynome $Q' - Q$, entier par rapport à x, est au moins, de même degré que B.

Digitized by Google

REMARQUE. Si A renfermait x à un degré moindre que B, le quotient Q serait égal à zéro, et le dividende A serait lui-même le reste.

EXEMPLES. On trouve, par la méthode précédente,

$$\frac{x^5-2x^3+x-1}{x^2-3}=x^3+x+\frac{4x-1}{x^2-3},$$

$$\frac{2x^4+3x^2-5x+7}{7x^3+x-1}=\frac{2}{7}x+\frac{\frac{19}{7}x^2-\frac{33}{7}x+7}{7x^3+x-1}.$$

REMARQUE. Quand on applique au quotient de deux polynomes A et B la transformation précédente, on donne au polynome entier Q le nom de quotient entier, et au numérateur R de la fraction $\frac{R}{B}$ celui de *reste* de la division.

131. Nous avons prouvé que les deux polynomes A et B étant ordonnés par rapport à une même lettre x, le quotient entier et le reste ne peuvent avoir qu'une seule forme (**130**). Mais si l'on change la lettre ordonnatrice, les mêmes polynomes peuvent conduire à un nouveau quotient et à un nouveau reste. Si on considère, par exemple, la fraction

$$\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$$

en ordonnant par rapport à x, on trouve pour quotient x^2-y^2, et pour reste $2y^4$. Si l'on ordonnait au contraire par rapport à y, on trouverait pour quotient y^2-x^2, et pour reste $2x^4$, en sorte que l'on a

$$\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}=x^2-y^2+\frac{2y^4}{x^2+y^2},$$

$$\frac{y^4+x^4}{y^2+x^2}=y^2-x^2+\frac{2x^4}{x^2+y^2}.$$

Différences et analogies entre la division arithmétique et la division des polynomes.

132. Les polynomes ordonnés suivant les puissances d'une lettre, présentent, avec les nombres entiers, des analogies qu'il est bon de remarquer. Un nombre entier comme 783214

Digitized by Google

exprime $7\times 10^5+8\times 10^4+3\times 10^3+2\times 10^2+1\times 10+4$, et on peut l'assimiler au polynome

$$7x^5+8x^4+3x^3+2x^2+x+4,$$

dans lequel on aurait supposé $x=10$. Il ne faut pas croire, cependant, que toute question d'arithmétique relative à des nombres entiers, soit, purement et simplement, un cas particulier d'une question d'algèbre dans laquelle ces nombres seraient remplacés par les polynomes correspondants.

Comparons, par exemple, les deux questions suivantes :

Diviser 783214 par 321.

Diviser $7x^5+8x^4+3x^3+2x^2+x+4$ par $3x^2+2x+1$.

Les conditions des deux problèmes ont entre elles des différences essentielles qui ne permettent pas de considérer le premier comme un cas particulier du second.

1° Le quotient de la division arithmétique doit être un nombre entier, tandis que le quotient de la division algébrique peut être un polynome, entier par rapport à x, dont les coefficients soient des nombres fractionnaires.

2° Les chiffres du quotient et du reste, dans la division arithmétique, doivent être moindres que 10, tandis que rien ne limite les coefficients des diverses puissances de x dans la division algébrique.

3° Dans la division arithmétique, le reste doit être moindre que le diviseur. Dans la division algébrique, il doit être de degré moindre.

4° Enfin, en algèbre, les résultats obtenus conviennent pour toutes les valeurs de x : il n'y a pas de condition analogue en arithmétique.

Conditions pour qu'un polynome soit divisible par un binome de la forme $x-a$.

133. Si l'on divise par $x-a$ un polynome ordonné suivant les puissances de x, le reste, devant être (**130**) de degré moindre que le diviseur, ne contiendra pas la lettre ordonnatrice x. On peut, d'après cela, le calculer sans effectuer la division, et en déduire la condition pour que celle-ci réussisse.

Soit X le polynome dividende, Q le quotient, et R le reste ; on a identiquement

$$X = Q(x-a) + R.$$

Dans cette égalité, qui a lieu quel que soit x, on peut supposer $x = a$; cette hypothèse annulant le produit $Q(x-a)$, on en déduit

$$X_a = R,$$

en désignant par X_a ce que devient X quand on y remplace x par a. Quant à R, comme il ne contient pas x, il n'est pas changé par cette substitution, et la valeur cherchée de R est, par conséquent, X_a. Ainsi donc

Le reste de la division d'un polynome par x — a *est le résultat de la substitution de* a *à* x *dans ce polynome.*

Il en résulte que la division ne réussira que si cette substitution donne un résultat égal à zéro.

134. Cette dernière proposition est d'une grande importance. Nous nous bornerons ici à en déduire quelques conséquences.

1° $x^m - a^m$ est divisible par $x - a$, car il s'annule évidemment pour $x = a$.

Si l'on effectue la division on trouvera pour quotient

$$[1] \qquad \frac{x^m - a^m}{x - a} = x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \ldots + a^{m-1},$$

et l'on peut vérifier, du reste, que les termes du second membre forment une progression géométrique dont la somme est

$$\frac{x^m - a^m}{x - a}.$$

2° $x^m - a^m$ est divisible par $x + a$ lorsque m est pair, car $x + a$ équivaut à $x - (-a)$; or $x^m - a^m$ devient, par la substitution de $-a$ à x,

$$(-a)^m - a^m,$$

c'est-à-dire zéro, puisque m étant pair, $(-a)^m = a^m$.

Si l'on effectue la division, on trouvera

$$[2] \qquad \frac{x^m - a^m}{x + a} = x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - \ldots - a^{m-1}.$$

Cette formule suppose que m soit pair.

3° x^m+a^m est divisible par $x+a$ quand m est impair, car $x+a$ équivaut à $x-(-a)$, et, en substituant $-a$ à x, dans le dividende x^m+a^m, celui-ci devient, $(-a)^m+a^m$, c'est-à-dire 0, puisque m étant impair $(-a)^m$ est égal à $-a^m$. On trouve, en faisant la division,

$$[3] \quad \frac{x^m+a^m}{x+a}=x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\ldots+a^{m-1};$$

cette formule suppose que m soit impair.

Remarque. Les formules [2] et [3] ne diffèrent pas réellement de [1], elles s'en déduisent l'une et l'autre en y remplaçant le nombre arbitraire a par $-a$, on obtient ainsi la première si m est pair, et la seconde si m est impair.

RÉSUMÉ.

122. Il arrive le plus ordinairement que pour indiquer la division de deux polynomes on se borne à les séparer par une barre horizontale, sans pouvoir transformer l'opération en une autre plus simple. — **123**. Si deux polynomes sont ordonnés par rapport à une même lettre et que le quotient de leur division soit égal à un polynome de même forme, on peut en trouver immédiatement le premier terme. — **124**. Si on multiplie le diviseur par le premier terme du quotient, que l'on retranche le produit du dividende, on obtiendra un reste qui, divisé par le diviseur, donnera pour résultat l'ensemble des autres termes du quotient. — **125**. Les deux théorèmes précédents permettent de faire une division quelconque, en admettant toutefois qu'il existe un polynome pouvant représenter le quotient. — **126**. Le procédé de division apprend, dans tous les cas, si réellement il existe un quotient entier; la condition nécessaire et suffisante est que l'un des termes du quotient multiplié par le diviseur donne un produit égal au dividende partiel qui l'a fourni. — Symptôme auquel on peut reconnaître que l'opération ne s'arrêtera pas. — **127**. Application à quelques exemples. — **128**. Il n'est nullement nécessaire que les coefficients de la lettre ordonnatrice soient numériques. — **129**. Ce qu'on entend par quotient et reste dans les divisions qui ne peuvent se faire exactement. — **130**. Quand on a choisi la lettre ordonnatrice, il n'y a qu'un seul quotient et qu'un seul reste. — **131**. Quand on change la lettre ordonnatrice, les mêmes polynomes peuvent conduire à un nouveau quotient et à un nouveau reste. — **132**. Différences et analogies qui existent entre la division algébrique des poly-

Digitized by Google

nomes entiers et la division algébrique des nombres entiers.— **133**. Conditions pour qu'un polynome ordonné par rapport à x soit divisible par un binome $x-a$. — **134**. Division de x^m-a^m et de x^m+a^m par $x-a$ et $x+a$, dans le cas où elles peuvent s'effectuer.

EXERCICES.

I. $$1+x^n+x^{2n}+\ldots+x^{np-n}$$
est divisible par $1+x+x^2+\ldots+x^{p-1}$,
les nombres entiers p et n étant premiers entre eux.

II. Si α désigne une racine primitive du nombre premier p, c'est-à-dire si les nombres 1, α, $\alpha^2\ldots\alpha^{p-2}$, divisés par p, laissent, peu importe dans quel ordre, des restes égaux à tous les nombres entiers inférieurs à p, le polynome
$$1+x+x^{\alpha}+x^{\alpha^2}+x^{\alpha^3}+\ldots+x^{\alpha^{p-2}},$$
est divisible par $1-x^p$.

III. α et p étant des nombres entiers définis, comme dans l'exercice précédent, si l'on pose
$$x-x^{\alpha}+x^{\alpha^2}-x^{\alpha^3}+x^{\alpha^4}-\ldots-x^{p-2}=\mathrm{M},$$
$\mathrm{M}^2\mp p$ sera divisible par $1+x+x^2+\ldots+x^{p-1}$.

IV. $$x^qy^r+y^qz^r+z^qx^r-x^ry^q-y^rz^q-z^rx^q$$
est divisible par le produit
$$(x-y)(x-z)(y-z).$$

V. $x^py^qz^r+y^pz^qx^r+z^px^qy^r-x^pz^qy^r-z^py^qx^r-y^px^qz^r$
est divisible par le même produit.

VI. $$(x^m-1)(x^{m-1}-1)(x^{m-2}-1)\ldots(x^{m-n+1}-1)$$
est divisible par $(x-1)(x^2-1)\ldots(x^n-1)$.

VII. Si m est impair, $(a+b+c)^m-a^m-b^m-c^m$ est divisible par $(a+b)(a+c)(b+c)$.

VIII. Quelles sont les conditions pour que x^m-a^m soit divisible par x^n-a^n.

Digitized by Google

CHAPITRE XIII.

COMBINAISONS ET FORMULE DU BINOME.

Définitions.

135. On nomme combinaisons n à n, de m objets distincts, les différents groupes que l'on peut former avec n de ces objets; il est utile d'en calculer le nombre.

La question peut être considérée sous deux points de vue, suivant que l'on regarde ou non, comme distincts, les groupes, qui, étant composés des mêmes objets, diffèrent, seulement, par l'ordre dans lequel on les place.

Dans le premier cas, les combinaisons reçoivent le nom d'*arrangements*; et dans le second, celui de *produits différents*.

Nombre des arrangements.

136. Calculons, d'abord, le nombre des arrangements distincts de m objets pris n à n. Désignons ce nombre par A_n et par A_{n-1} celui des arrangements, des mêmes objets, $n-1$ à $n-1$. Si tous les arrangements $n-1$ à $n-1$ étaient formés, en plaçant successivement, à la suite de chacun d'eux, les $m-(n-1)$, objets qui n'y entrent pas, on formerait des arrangements n à n, dont le nombre serait

$$A_{n-1}[m-(n-1)], \quad \text{ou} \quad A_{n-1}(m-n+1);$$

car chaque arrangement $n-1$ à $n-1$, fournit, de cette manière, $[m-(n-1)]$, arrangements n à n. Je dis que $A_{n-1}[m-(n-1)]$ est précisément, le nombre des arrangements n à n; et pour cela, il faut montrer qu'ils ont tous été formés, et que chacun d'eux ne l'a été qu'une seule fois.

1° On a obtenu tous les arrangements n à n, car on peut former tout arrangement de n objets, en plaçant le dernier

d'entre eux à la suite de l'arrangement formé par l'ensemble des $n-1$ autres.

2° Un même arrangement n'a pu être formé qu'une fois, car les arrangements $n-1$ à $n-1$, étant distincts, ainsi que les $m-n+1$, objets que l'on place à la suite de chacun d'eux, les groupes que l'on forme diffèrent, soit par les $n-1$ premiers objets s'ils proviennent de deux arrangements $n-1$ à $n-1$ différents, soit par le dernier, s'ils proviennent du même arrangement $n-1$ à $n-1$.

On a donc la relation

$$A_n = (m-n+1)A_{n-1}.$$

Cette relation étant démontrée, pour une valeur quelconque de n, on aura de même, en désignant par A_{n-2}, $A_{n-3}\ldots A_1$, le nombre des arrangements $n-2$ à $n-2$, $n-3$ à $n-3$,... un à un :

$$\begin{aligned} A_{n-1} &= (m-n+2)A_{n-2}, \\ A_{n-2} &= (m-n+3)A_{n-3}, \\ &\vdots \\ A_2 &= (m-1)A_1. \end{aligned}$$

En multipliant ces équations membre à membre, les facteurs A_{n-1}, A_{n-2}, A_2 disparaîtront, et il vient, en remarquant que $A_1 = m$,

$$A_n = (m-n+1)(m-n+2)\ldots(m-1)m.$$

Nombre des permutations.

137. La formule précédente, si on y suppose $n=m$, fera connaître le nombre des arrangements de m lettres m à m. Ces arrangements, dans lesquels figurent toutes les lettres, se nomment des *permutations*. En désignant leur nombre par P_m, on a

$$P_m = 1.2\ldots m,$$

puisque pour $m=n$, $m-n+1$ devient égal à l'unité.

Nombre des produits différents.

138. Les produits différents de m objets, n à n, sont les

groupes distincts que l'on peut former, avec ces m objets, en regardant comme identiques ceux qui ne diffèrent que par l'ordre des objets.

Représentons par C_n le nombre de *ces produits*. Imaginons qu'on les considère tous ensemble, et que l'on forme les permutations des n objets contenus dans chacun d'eux; les groupes ainsi formés, seront des *arrangements* des m objets données n à n. Or, je dis qu'ils y seront tous, et chacun une seule fois.

1° Ils y seront tous, car les objets qui forment un arrangement, étant considérés indépendamment de leur ordre, composent l'un des produits différents; et lorsque l'on permutera de toutes les manières les objets qui composent ce produit, l'un des groupes ainsi formés sera l'arrangement considéré.

2° Chaque arrangement sera formé une seule fois, car les arrangements qui proviennent d'un même produit, diffèrent par l'ordre des objets, et ceux qui proviennent de deux produits différents, ne sont pas composés des mêmes objets.

On peut donc obtenir toute la série des arrangements, en permutant les produits différents, de toutes les manières possibles. Or, chaque produit, fournit ainsi, $1.2\ldots n$ arrangements distincts; le nombre total des arrangements A_n est donc égal au nombre des produits C_n, multiplié par $1.2\ldots n$, et l'on a, par conséquent,

$$A_n = C_n . 1.2\ldots n,$$

$$[1] \quad C_n = \frac{A_n}{1.2\ldots n} = \frac{(m-n+1)(m-n+2)\ldots m}{1.2\ldots n}.$$

139. Remarque I. La formule précédente peut se mettre sous une forme que l'on trouve quelquefois plus commode. Si l'on multiplie en effet par $1.2\ldots m-n$ les deux termes de la fraction qui représente C_n, elle devient

$$[2] \quad C_n = \frac{1.2\ldots(m-n)(m-n+1)(m-n+2)\ldots m}{1.2\ldots n . 1.2\ldots m-n};$$

en sorte que, au numérateur se trouve le produit des nombres entiers depuis 1 jusqu'à m, et au dénominateur le produit des nombres entiers de 1 jusqu'à $m-n$, et le produit des nombres entiers de 1 à n.

140. Remarque II. La formule [2] reste évidemment la même si l'on change n en $m-n$; cette substitution aura seulement pour effet de changer, l'un dans l'autre, les facteurs $1.2...n$, et $1.2...(m-n)$ du dénominateur.

Le nombre des produits différents de m objets, n à n, est, par conséquent, le même que celui de m objets, $m-n$ à $m-n$.

L'égalité de ces deux nombres est d'ailleurs évidente *à priori*. Si, en effet, dans m objets, on prend un groupe de n, il restera un groupe de $m-n$: les groupes ou produits n à n et $m-n$ à $m-n$ se correspondent donc deux à deux, et sont, par conséquent, en même nombre.

Puissance d'un binome.

141. Nous avons vu (25) que le produit d'un nombre quelconque de polynomes est la somme de tous les produits que l'on peut former en prenant pour facteur un terme de chacun d'eux.

Appliquons cette règle à la formation du produit de n binomes ayant même premier terme

$$(x+a)(x+b)(x+c)...(x+l);$$

si nous ordonnons ce produit suivant les puissances décroissantes de x, il est évident que le premier terme sera x^m, produit formé en prenant comme facteurs les m premiers termes des binomes.

Le terme en x^{m-1} se composera des produits dans lesquels on prendra, comme facteurs, les premiers termes de $m-1$ binomes, avec le dernier du binome restant, et le coefficient de x^{m-1} sera, par conséquent, la somme des seconds termes de nos binomes.

Le terme en x^{m-2} se composera des produits dans lesquels on prendra, comme facteurs, les premiers termes de $m-2$ binomes, et les derniers des deux binomes restants. Le coefficient de x^{m-2} sera, par conséquent, la somme des produits deux à deux des seconds termes.

On verra, de même, que le coefficient de x^{m-3}, est la somme des produits trois à trois des seconds termes, et qu'en général, le coefficient de x^{m-n}, est la somme de leurs produits n à n.

On écrit souvent ce résultat de la manière suivante :

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+k)(x+l)$$
$$=x^m+x^{m-1}\Sigma a+x^{m-2}\Sigma ab+x^{m-3}\Sigma abc\ldots$$
$$+x^{m-n}\Sigma abc\ldots q+\ldots abc\ldots kl,$$

en représentant par Σa, Σab, $\Sigma abc\ldots$ la somme des seconds termes, la somme de leurs produits deux à deux, trois à trois, etc.

142. Pour déduire de ce qui précède, l'expression de $(x+a)^m$, il suffit de supposer $a=b=c\ldots=l$, le développement se simplifie alors notablement.

Le premier terme reste égal à x^m.

Le coefficient de x^{m-1}, égal à la somme des seconds termes, devient égal à ma.

Le coefficient de x^{m-2}, égal à la somme des produits deux à deux des seconds termes, devient égal à a^2 multiplié par le nombre de ces produits, c'est-à-dire à

$$\frac{m(m-1)}{2}a^2.$$

Le coefficient de x^{m-3}, égal à la somme des produits trois à trois des seconds termes, devient égal à a^3 multiplié par le nombre de ces produits, c'est-à-dire à

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3.$$

En général, le coefficient de x^{m-p}, qui est la somme des produits p à p des seconds termes, deviendra égal à a^p multiplié par le nombre de ces produits, c'est-à-dire à

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}a^p;$$

on a donc, enfin,

$$(x+a)^m=x^m+mx^{m-1}a+\frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2}+\ldots$$
$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}a^px^{m-p}+\ldots+a^m.$$

143. Remarque I. Dans le développement précédent, les coefficients des termes à égale distance des extrêmes sont égaux. En effet, le coefficient de $x^{m-p}a^p$ est le nombre des produits diffé-

Digitized by Google

rents de m lettres p à p et celui de $a^{m-p}x^p$ le nombre des produits différents de m lettres $m-p$ à $m-p$; or ces nombres sont égaux (**140**).

144. Remarque II. Quand on forme successivement les différents termes du développement de $x+a$, le calcul de chaque terme peut être simplifié par la connaissance du terme précédent; en examinant avec attention les termes successifs, on aperçoit, en effet, cette règle générale :

Pour passer d'un terme au suivant, il faut multiplier son coefficient par l'exposant de x *dans ce terme, et le diviser par le nombre qui marque son rang, ajouter une unité à l'exposant de* a *et en retrancher une à celui de* x.

145. Remarque III. On n'a fait aucune hypothèse sur le signe des nombres x et a; a peut donc avoir une valeur négative $-b$, et l'on a, par conséquent,

$$(x-b)^m = x^m + m(-b)x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}(-b)^2x^{m-2} \ldots + (-b)^m;$$

ou, en remarquant que les puissances paires de $-b$ sont égales à celles de b, et que les puissances impaires sont égales et de signes contraires

$$(x-b)^m = x^m - mbx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}b^2x^{m-2}$$
$$-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}b^3x^{m-3} + \ldots \pm b^m.$$

Puissances d'un trinome.

146. Un trinome $a+b+c$, peut être considéré comme un binome, si l'on regarde les deux premiers termes $(a+b)$ comme réunis en un seul. On aura alors

$$[1] \quad [(a+b)+c]^m = (a+b)^m + m(a+b)^{m-1}c + \frac{m(m-1)}{1.2}(a+b)^{m-2}c^2 + \ldots$$
$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}(a+b)^{m-p}c^p + \ldots$$

Si l'on développe les diverses puissances de $a+b$ qui figurent dans le second membre, on obtiendra une somme de termes de la forme $a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma$, dans lesquels la somme des expo-

sants α, β, γ sera constamment égale à m. Si l'on considère, par exemple, ceux qui proviennent du terme

$$\frac{m(m-1)\ldots m-p+1}{1.2\ldots p}(a+b)^{m-p}c^p,$$

ils contiennent le produit de c^p par des puissances de a et b dont les exposants ont une somme égale à $m-p$, de sorte que les trois exposants réunis forment une somme égale à m.

Réciproquement, α, β, γ étant trois nombres quelconques dont la somme soit égale à m, il y aura dans le développement un terme en $a^\alpha\ b^\beta\ c^\gamma$: car, dans [1], se trouve le terme

$$\frac{m.(m-1)\ldots(m-\gamma+1)}{1.2\ldots\gamma}(a+b)^{m-\gamma}c^\gamma,$$

et le développement de $(a+b)^{m-\gamma}$ contient un terme dans lequel a figure avec l'exposant α, et b, par conséquent, avec l'exposant $m-\gamma-\alpha$ ou β.

147. Cherchons le coefficient de ce terme en $a^\alpha\ b^\beta\ c^\gamma$: il provient, comme nous l'avons dit, de

$$\frac{m.(m-1)\ldots(m-\gamma+1)}{1.2\ldots\gamma}(a+b)^{m-\gamma}c^\gamma,$$

ce qui peut s'écrire (**139**)

$$\frac{1.2\ldots m}{1.2\ldots\gamma.1.2\ldots(m-\gamma)}(a+b)^{m-\gamma}c^\gamma;$$

or, dans le développement de $(a+b)^{m-\gamma}$, le coefficient de $a^\alpha b^{m-\gamma-\alpha}$ est égal (**139**) à

$$\frac{1.2\ldots(m-\gamma)}{1.2\ldots\alpha.1.2\ldots(m-\gamma-\alpha)}.$$

Le terme demandé est donc

$$\frac{1.2\ldots m.1.2\ldots(m-\gamma)}{1.2\ldots\gamma.1.2\ldots(m-\gamma)1.2\ldots\alpha.1.2\ldots(m-\gamma-\alpha)}.a^\alpha b^{m-\gamma-\alpha}c^\gamma;$$

or, en supprimant le facteur commun $1.2\ldots(m-\gamma)$, et remplaçant $m-\gamma-\alpha$ par β,

$$\frac{1.2\ldots m}{1.2\ldots\alpha.1.2\ldots\beta.1.2\ldots\gamma}.a^\alpha b^\beta c^\gamma,$$

et le développement se compose de tous les termes analogues, qui correspondent à toutes les valeurs de α, β, γ, dont la somme soit égale à m.

148. Remarque. On trouvera sans peine, par un procédé tout à fait analogue, que le développement de $(a+b+c+d)^m$ a pour terme général

$$\frac{1.2\ldots m}{1.2\ldots\alpha.1.2\ldots\beta.1.2\ldots\gamma.1.2\ldots\delta}.a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta,$$

et se compose de tous les termes analogues qui correspondent à toutes les valeurs de α, β, γ, δ, dont la somme soit égale à m.

RÉSUMÉ.

135. Définition des combinaisons; ce que l'on nomme arrangements, produits différents. — **136.** Nombre des arrangements de m objets pris n à n. — **137.** Nombre des permutations. — **138.** Nombre des produits différents. — **139.** Forme plus simple de l'expression du nombre des produits différents. — **140.** Le nombre des produits différents de m lettres n à n est le même que celui de m lettres $m-n$ à $m-n$. — **141.** Formation du produit de m binomes qui ont mêmes premiers termes. — **142.** Puissance d'un binome. — **143.** Les coefficients à égale distance des extrêmes sont égaux. — **144.** Moyen de former un terme connaissant le précédent. — **145.** Puissance d'un binome dont le second terme est négatif. — **146.** Puissance d'un trinome. — **147.** Terme général du développement. — **148.** Terme général du développement de $(a+b+c+d)^m$.

EXERCICES.

I. En désignant par $[\overset{n}{m}]$ le produit $m(m-1)\ldots(m-n+1)$, vérifier les formules

$$[(a\overset{m}{+}b)]=[\overset{m}{a}]+m[\overset{m-1}{a}]b+\frac{m.m-1}{1.2}[\overset{m-2}{a}][\overset{2}{b}]+\ldots$$
$$+\frac{m.m-1\ldots m-n+1}{1.2\ldots n}[\overset{m-n}{a}][\overset{n}{b}]+\ldots+[\overset{m}{b}].$$

$$[(a+\overset{m}{b}+c)]=[\overset{m}{a}]+\ldots+\frac{1.2\ldots m}{1.2\ldots\alpha.1.2\ldots\beta.1.2\ldots\gamma}[\overset{\alpha}{a}][\overset{\beta}{b}][\overset{\gamma}{c}]+\ldots,$$

Digitized by

le second membre comprenant les termes analogues à ceux que nous avons écrits, et correspondant à toutes les valeurs de α, β, γ, pour lesquelles $\alpha+\beta+\gamma=m$. On regarde $[a]$ comme égal à 1.

II. Nombre des termes du développement de $(a+b+c)^m$ et de $(a+b+c+d)^m$.

III. Vérifier la formule

$$x^n+\frac{1}{x^n}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^n-n\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-2}+\frac{n(n-3)}{1.2}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-4}$$
$$-\frac{n(n-3)(n-5)}{1.2.3}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-6}+\ldots$$

IV. Vérifier

$$1.2\ldots m=(m+1)^m-m.m^m+\frac{m(m-1)}{1.2}(m-1)^m$$
$$-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(m-2)^m+\ldots$$

V. Trouver le plus grand terme du développement de $(x+a)^m$. x et a étant donnés, et m augmentant indéfiniment, trouver la limite du rapport de leurs exposants dans le terme maximum.

Trouver le plus grand terme de $(a+b+c)^m$ et les rapports limites des exposants de a, b, c dans ce plus grand terme, lorsque m augmente indéfiniment.

VI. Vérifier que $(x+a)^m+(x-a)^m$ est plus grand que $2x^m$. En déduire le maximum de $x+y$ lorsque x^m+y^m est donné.

VII. Vérifier la formule

$$(x+\alpha)^m=x^m+m\alpha(x+\beta)^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}\alpha(\alpha-2\beta)(x+2\beta)^{m-2}$$
$$+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}\alpha(\alpha-n\beta)^{n-1}(x+n\beta)^{m-n}$$
$$+\ldots+m\alpha[\alpha-(m-1)\beta]^{m-2}[x+(m-1)\beta]+\alpha(\alpha-m\beta)^{m-1}.$$

Cette formule, dans le cas de $\beta=0$, ne diffère pas de celle du binome : elle a lieu quel que soit β.

Digitized by Google

VIII. Nombre de manières de décomposer un polygone en triangles par les diagonales : démontrer les formules

$$P_{n+1} = P_n + P_{n-1}P_3 + P_{n-2}P_4 + \dots + P_3P_{n-1} + P_n$$

$$P_{n+1} = \frac{4n-6}{n} P_n,$$

P_n désignant de combien de manières cette décomposition peut se faire pour un polygone de n côtés.

IX. Si l'on considère une permutation de n nombres $1.2.3\dots n$, que l'on dise qu'il y a *dérangement* quand ce nombre est suivi, immédiatement ou non, d'un autre plus petit que lui, prouver que le nombre total des dérangements contenus dans les permutations de ces n nombres est égal à $(1.2\dots n).\frac{n(n-1)}{4}$.

X. m étant un nombre impair, on a, pour $n < m - 1$,

$$m\frac{(m-1)(m-2)\dots(m-n)}{1 \,.\, 2 \dots\dots\dots n}\left[\frac{1}{m} - \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{m-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{m-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\cdot\frac{1}{m-3} + \dots\right] = \pm 1.$$

XI. Si $1, \quad A, \quad B, \quad C, \quad D, \dots$

sont les coefficients de la m^{me} puissance d'un binome,

$$1, \quad 1+A, \quad A+B, \quad B+C, \quad C+D, \dots$$

seront les coefficients de la $(m+1)^e$ puissance.

XII. On écrit en cercle m nombres

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \dots, x_m;$$

on ajoute chaque nombre au suivant et on écrit les sommes sur un nouveau cercle. On opère sur ce cercle comme sur le précédent. Prouver que, si $n+1$ est moindre que m, les nombres écrits sur le $(n+1)^e$ cercle seront de la forme

$$x_1 + nx_2 + \frac{n(n-1)}{1.2}x_3 + \dots + nx_n + x_{n+1},$$

et que la somme des nombres écrits sur ce cercle est égale à $2^n(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$.

XIII. Parmi les diviseurs d'un nombre donné, combien y en a-t-il qui renferment n facteurs premiers différents ?

Digitized by Google

CHAPITRE XIV.

RACINES DES POLYNOMES.

---

149. L'extraction des racines est une opération qui, appliquée aux polynomes, ne peut pas, en général, être effectuée. Le plus souvent, on doit se borner à l'indiquer. Dans certains cas, cependant, la racine d'un polynome peut s'exprimer par un autre polynome; nous allons voir comment on peut alors la trouver. Nous nous occuperons d'abord des racines carrées.

Racine carrée des polynomes.

150. La détermination de la racine carrée d'un polynome repose sur le théorème suivant.

Théorème. *Si un polynome* A, *ordonné suivant les puissances décroissantes d'une lettre, est le carré d'un autre polynome* B *ordonné de la même manière, le premier terme de* A *est le carré du premier terme de* B.

En effet, le produit de deux polynomes a pour premier terme (**26**) le produit des premiers termes des deux facteurs. Si donc les deux polynomes que l'on multiplie sont égaux à un même polynome B, le produit B^2 aura, pour premier terme, le carré du premier terme de B.

On peut énoncer le théorème précédent en disant que si un polynome B est la racine carrée d'un polynome A, son premier terme est la racine carrée du premier terme de A.

On pourra donc, lorsqu'un polynome sera ordonné suivant les puissances décroissantes d'une lettre, calculer le terme qui doit être le premier de sa racine, si elle existe; si, en effet, le premier terme du polynome proposé est Ax^m, le premier terme

de sa racine carrée ne pourra être que $\sqrt{Ax^m}$ ou $x^{\frac{m}{2}}\sqrt{A}$. Ce terme ne sera rationnel que si $\frac{m}{2}$ est entier, et A un carré parfait.

151. Ayant le moyen d'obtenir, dans chaque cas, le premier terme de la racine, nous pourrons déterminer successivement tous les autres, si nous résolvons la question suivante.

Connaissant les n *premiers termes de la racine, trouver le* n + 1^{me}.

Soit A le polynome proposé, S l'ensemble des n premiers termes de la racine et z la somme des termes suivants que nous supposons encore inconnus : on doit avoir identiquement

$$A = (S + z)^2,$$

ou

$$A = S^2 + 2Sz + z^2,$$

et, en faisant passer S^2, qui est connu, dans le premier membre,

$$A - S^2 = 2Sz + z^2.$$

Les deux membres de l'équation précédente devant être identiques, les termes du plus haut degré en x doivent être égaux ; A et S étant connus, on trouvera facilement le premier terme de $A - S^2$; quant au second membre, le terme du plus haut degré est le produit du premier terme de 2S par le premier terme de z : ce produit est, en effet, le premier terme de $2Sz$ et il est de degré plus élevé que le premier terme de z^2, puisque z étant de degré moindre que S, z^2 est de degré moindre que Sz.

Si donc on nomme v le premier terme de z, son produit par le premier terme de 2S sera égal au premier terme du premier membre. v est donc le quotient de la division du premier terme du premier membre $A - S^2$, par le premier terme de 2S, c'est-à-dire par le double du premier terme de la racine.

152. Remarque. L'expression $A - S^2$ change à chaque opération, puisque S comprend un terme de plus. On peut prouver que le degré du premier terme va sans cesse en diminuant et que les termes obtenus au quotient sont, par conséquent, comme cela doit être, d'un degré de moins en moins élevé. Soit, en effet, v le terme obtenu en divisant le premier terme de $A - S^2$ par deux fois le premier terme de la racine. Pour obtenir

le terme suivant, il faut prendre comme dividende le premier terme de

$$A-(S+v)^2,$$

c'est-à-dire

$$A-S^2-2Sv-v^2;$$

or, le premier terme de $A-S^2$ étant égal au premier terme de $2Sv$ sera détruit par lui, et comme v^2 est de degré moindre que $2Sv$, l'expression précédente est de degré moindre que $A-S^2$.

153. Les raisonnements précédents supposent qu'il existe une racine carrée représentée par un polynome, et ils donnent le moyen d'en obtenir les différents termes. Il nous reste à examiner le cas où la racine ne peut être mise sous cette forme et à rechercher comment se manifestera l'impossibilité.

Si A n'est le carré d'aucun polynome, $A-S^2$ ne pourra jamais être nul, quel que soit le nombre des termes de S, et l'opération n'aura pas de fin. On trouverait, en la continuant, une série de termes dont les exposants deviendraient négatifs et croîtraient indéfiniment en valeur absolue. Pour savoir à quel caractère on reconnaîtra qu'il en est ainsi, remarquons que, si la racine existe, son dernier terme peut se calculer immédiatement, absolument comme le premier; on prouvera, en effet, comme (**146**), qu'il est la racine carrée du dernier terme du polynome proposé; lors donc que l'opération fournira un terme de degré moindre que celui qui doit être le dernier, on pourra se dispenser de la continuer et affirmer qu'elle se prolongera indéfiniment.

154. Remarque. Quelquefois, à l'inspection d'un polynome, on peut, sans aucun calcul, affirmer qu'il n'est pas le carré d'un autre polynome :

1° Lorsque le premier terme et le dernier n'ont pas une racine carrée rationnelle, il est évident qu'aucun polynome *rationnel* ne peut être la racine carrée du proposé;

2° Si la racine carrée du premier terme a un coefficient irrationnel, il peut se faire néanmoins que le polynome ait une racine carrée à coefficients irrationnels, contenant rationnellement la lettre ordonnatrice. Mais si la racine carrée du premier terme est rationnelle, il faut que celle du dernier le soit aussi; car, le premier terme de la racine étant rationnel, l'opération

qui fait connaître les autres ne fournira évidemment que des termes rationnels; il faut donc, en particulier, que le dernier terme de la racine soit rationnel et, pour cela (**149**), que le dernier terme du polynome proposé soit un carré parfait.

155. Exemples. Soit à extraire la racine carrée de

$$(y^2+2y+1)x^4+x^3(4y^2+4y)+(6y^3+12y^2+2y)x^2 \\ +(12y^3+4y^2)x+9y^4+6y^3+y^2,$$

le premier terme est (**146**) la racine carrée de

$$(y^2+2y+1)x^4,$$

c'est-à-dire

$$x^2\sqrt{y^2+2y+1}.$$

Or, on pourrait trouver par l'application de la méthode générale, et il est d'ailleurs facile de voir immédiatement, que l'on a

$$\sqrt{y^2+2y+1}=y+1;$$

le premier terme de la racine cherchée, ordonnée suivant les puissances de x, est donc

$$x^2(y+1);$$

la remarque (**154**) n'est pas ici applicable et l'on n'aperçoit aucun symptôme d'impossibilité, car le dernier terme du polynome proposé $9y^4+6y^3+y^2$ est un carré parfait $(3y^2+y)^2$. Continuons donc l'opération.

Si l'on forme le carré du premier terme de la racine et qu'on le retranche du polynome proposé, il reste

$$x^3(4y^2+4y)+(6y^3+12y^2+2y)x^2+(12y^3+4y^2)x+9y^4+6y^3+y^2;$$

le premier terme de ce reste, $x^3(4y^2+4y)$, étant divisé par le double du premier terme de la racine $2x^2(y+1)$, donne pour quotient $2xy$, qui est (**151**) le second terme de la racine.

Si l'on forme le carré de la somme des deux premiers termes

$$x^2(y+1)+2xy,$$

et qu'on le retranche du polynome proposé, on trouve pour reste

$$(6y^3+8y^2+2y)x^2+(12y^3+4y^2)x+9y^4+6y^3+y^2;$$

le premier terme de ce reste $x^2(6y^3+8y^2+2y)$, étant divisé par le double du premier terme de la racine $2x^2(y+1)$, donne pour quotient $3y^2+y$, qui est le troisième terme de la racine.

Si l'on forme le carré de l'ensemble des trois premiers termes de la racine

$$x^2(y+1)+2xy+3y^2+y$$

et qu'on le retranche du polynome proposé, on trouve un reste nul. Le polynome proposé est par conséquent un carré parfait et nous en avons trouvé la racine.

Remarque. Lorsque l'on a obtenu une partie de la racine, il faut en former le carré et le retrancher du polynome proposé; l'habitude du calcul permet d'abréger cette opération, qui, de toute manière, est d'ailleurs fort simple : par exemple, lorsque nous avons à former le carré de

$$[1] \qquad x^2(y+1)+2xy+3y^2+y$$

pour le retrancher du polynome proposé, nous pouvons remarquer que, déjà, pour calculer le troisième terme de la racine, on a formé et retranché le carré de $x^2(y+1)+2xy$, et qu'il est resté

$$[2] \quad (6y^3+8y^2+2y)x^2+(12y^3+4y^2)x+9y^4+6y^3+y^2;$$

il suffira donc de retrancher, de ce reste, les autres parties dont se compose le carré de [1], c'est-à-dire le double produit de la somme des deux premiers termes $x^2(y+1)+2xy$ par le troisième $3y^2+y$, et le carré de $3y^2+y$; nous pouvons même nous dispenser de former le double produit de $x^2(y+1)$ par $3y^2+y$, il est égal, en effet, au premier terme de [2], car $3y^2+y$ a été, précisément, obtenu en divisant ce premier terme par $2x^2(y+1)$.

Soit encore à extraire la racine carrée de

$$x^8y^2+3yx^7+y^3x^4+y^2+1;$$

à la seule inspection de ce polynome, on voit (150) qu'il ne peut avoir pour racine carrée un autre polynome, car le premier terme x^8y^2 est un carré parfait $(x^4y)^2$ et le dernier terme y^2+1 n'en est pas un.

Racine m^{me} des polynomes.

156. La détermination de la racine m^{me} d'un polynome repose sur le théorème suivant :

Théorème. *Si un polynome* A, *ordonné suivant les puissances décroissantes d'une lettre, est la puissance* m^{me} *d'un autre polynome* B, *ordonné de la même manière, le premier terme de* A *est la puissance* m^{me} *du premier terme de* B.

Ce théorème résulte de ce que, dans la multiplication de plusieurs polynomes le premier terme du produit est le produit des premiers termes des facteurs. Si les polynomes que l'on multiplie sont tous égaux à un même polynome B, le produit est B^m, et le produit des premiers termes est la puissance m^{me} du premier terme de B ; ce qui démontre le théorème énoncé.

On peut énoncer le théorème précédent en disant : Si un polynome B est la racine m^{me} d'un polynome A, le premier terme de B est la racine m^{me} du premier terme de A.

On pourra donc, lorsqu'un polynome sera ordonné suivant les puissances décroissantes d'une lettre, calculer le premier terme de la racine. Si, en effet, le premier terme du polynome proposé est Ax^n, le premier terme de la racine ne pourra être que $\sqrt[m]{Ax^n}$, c'est-à-dire $x^{\frac{n}{m}}\sqrt[m]{A}$. Ce terme ne sera rationnel que si $\frac{m}{n}$ est entier et A une puissance m^{me} exacte.

157. Remarque I. Si le coefficient du premier terme A est numérique, on reconnaîtra facilement s'il est une puissance exacte et l'on trouvera sa racine. Mais s'il est lui-même un polynome, il faudra commencer par extraire la racine de ce polynome. Pour cela, on l'ordonnera par rapport à l'une des lettres qu'il renferme et on lui appliquera la méthode que nous exposons.

158. Remarque II. Le dernier terme de la racine peut s'obtenir immédiatement comme le premier, il est la racine m^{me} du dernier terme du polynome proposé ; on le démontrera absolument de la même manière.

159. Ayant le moyen d'obtenir, dans chaque cas, le premier terme de la racine, nous pourrons déterminer, successivement, tous les autres, si nous résolvons la question suivante :

Connaissant les n *premiers termes de la racine, trouver le* $(n+1)^{me}$.

Soient A le polynome proposé, S la somme des n premiers termes de la racine, et z la somme des termes encore inconnus; on doit avoir identiquement

$$A=(S+z)^m,$$

ou (142)

$$A=S^m+mS^{m-1}z+\frac{m(m-1)}{1.2}S^{m-2}z^2+\ldots+z^m,$$

et, en faisant passer S^m qui est connu, dans le premier membre,

$$A-S^m=mS^{m-1}z+\frac{m(m-1)}{1.2}S^{m-2}z^2+\ldots+z^m;$$

les deux membres de l'équation précédente devant être identiques, leurs premiers termes doivent être égaux. A et S étant connus, on calculera facilement le premier terme de $A-S^m$. Quant au premier terme du second membre, c'est le premier terme de $mS^{m-1}z$, car ce produit $mS^{m-1}z$ est de degré plus élevé que les termes suivants qui contiennent $S^{m-2}z^2$, $S^{m-3}z^3$. Ces produits contiennent en effet la lettre ordonnatrice à un degré de moins en moins élevé, puisque pour former chacun d'eux il faut remplacer, dans le précédent, un facteur égal à S par un facteur z de degré moindre. Si donc on nomme v le premier terme de z, son produit par le premier terme de mS^{m-1} sera égal au premier terme du premier membre; v est donc le quotient de la division du premier terme du premier membre, par le premier terme de mS^{m-1}.

Remarque I. Le premier terme de mS^{m-1} est égal à m fois la $(m-1)^{me}$ puissance du premier terme de S, de sorte que, dans les divisions qui fournissent les termes successifs de la racine, le diviseur est toujours la même.

160. Remarque II. Le premier membre $A-S^m$, change à chaque opération, puisque S contient un terme de plus. On peut prouver que son degré va sans cesse en diminuant et que les

termes obtenus à la racine sont par conséquent, comme cela doit être, d'un degré de moins en moins élevé.

Soit en effet v le terme obtenu en divisant le premier terme de $A - S^m$ par m fois le premier terme de S^{m-1}. Le dividende de la division qui donnera le terme suivant de la racine est le premier terme de

$$A - (S + v)^m,$$

c'est-à-dire de

$$[1] \qquad A - S^m - mS^{m-1}v - \frac{m(m-1)}{1 . 2} S^{m-1}v^2 - \ldots$$

or, le premier terme de $A - S^m$ étant égal au premier terme de $mS^{m-1}v$, et les produits suivants $S^{m-2}v^2$, $S^{m-3}v^3$ étant des degrés de moins en moins élevés, l'expression [1] précédente est, comme nous voulions le montrer, de degré moindre que $A - S^m$.

161. Les raisonnements précédents supposent qu'il existe une racine m^{me} égale à un polynome, et ils donnent le moyen d'en obtenir les différents termes. Mais il faut encore examiner le cas où la racine ne peut être mise sous cette forme et montrer comment se manifestera l'impossibilité.

Si A n'est la puissance m^{me} d'aucun polynome, $A - S^m$ ne sera jamais nul et l'opération n'aura pas de fin. On trouverait, en la continuant, une suite indéfinie de termes dont les exposants deviendraient négatifs et croîtraient indéfiniment en valeur absolue. Pour savoir à quel moment on peut affirmer qu'il en sera ainsi, il suffit de remarquer que, si la racine existe, son dernier terme peut se calculer immédiatement (**158**). Lors donc que l'opération fournira un terme de degré moindre que celui qui doit être le dernier, on pourra se dispenser de la continuer et affirmer qu'elle se prolonge indéfiniment.

Remarque. Quelquefois, à la seule inspection d'un polynome, on peut affirmer qu'il n'est pas la puissance m^{me} d'un autre polynome :

1° Lorsque le premier terme et le dernier ne sont pas des puissances m^{mes} exactes, aucun polynome rationnel ne peut être la racine du proposé.

2° Si la racine m^{me} du premier terme a un coefficient irrationnel, il peut se faire néanmoins que le polynome ait une racine m^{me} à coefficients irrationnels contenant rationnellement

la lettre ordonnatrice. Mais si la racine m^{me} du premier terme est rationnelle, il faut que celle du dernier le soit aussi, car, le premier terme de la racine étant rationnel, l'opération qui fait connaître les autres ne fournit évidemment que des termes rationnels, il faut donc, en particulier, que le dernier terme de la racine soit rationnel, et pour cela que le dernier terme du polynome proposé soit une puissance m^{me} exacte.

RÉSUMÉ.

149. Dans la plupart des cas, la racine d'un polynome ne peut pas s'exprimer sous une forme plus simple. — 150. Si un polynome A ordonné par rapport à une lettre est le carré d'un polynome B ordonné de la même manière, son premier terme est le carré du premier terme de B; un polynome ordonné étant donné, on peut, d'après cela, trouver le premier terme de sa racine carrée. — 151. Connaissant un nombre quelconque de termes de la racine carrée, on peut trouver le suivant, il en résulte que l'on peut les calculer tous successivement. — 152. Les termes trouvés, par le procédé précédent, sont, comme cela doit être, de degré de moins en moins élevé. — 153. Caractères auxquels on reconnaît que l'opération ne s'arrêtera pas. — 154. Cas où le premier terme et le dernier ne sont pas tous deux des carrés. — 155 Quelques exemples. — 156. Si un polynome A est la puissance m^{me} d'un autre polynome B, le premier terme de A est la puissance m^{me} du premier terme de B. — 157. Si le premier terme de A est un polynome, pour avoir le premier terme de la racine il faudra trouver la racine de ce polynome. — 158. Le dernier terme de la racine peut s'obtenir immédiatement, comme le premier. — 159. Connaissant un certain nombre de termes de la racine, on peut trouver le suivant. — Il en résulte que l'on peut les calculer tous successivement. — 160. Les termes obtenus sont, comme cela doit être, de degré de plus en plus petit. — 161. Caractères auxquels on peut reconnaître que l'opération ne se terminera pas.

EXERCICES.

I. Si u, v, z sont trois fractions algébriques, rationnelles, contenant une même lettre x, telles que

$$u^2 = v^2 + z^2;$$

si, de plus, le degré de z (excès de degré du numérateur sur le dénominateur) est moindre que celui de v, prouver que la partie entière de v est la même que celle de u.

II. Trouver un triangle tel que les trois côtés et la hauteur soient en progression par quotient. En nommant ses côtés $\frac{x^2}{y}$, x, y, et la hauteur par conséquent $\frac{y^2}{x}$, on trouve entre x et y une équation du huitième degré qui se simplifie, parce que son premier membre est un carré parfait.

III. Extraire la racine carrée de

$$4lm(l+m)(l+n)+(l^2-mn)^2,$$

IV. Extraire la racine carrée de

$$4[(a^2-b^2)cd+(c^2-d^2)ab]^2+[(a^2-b^2)(c^2-d^2)-4abcd]^2.$$

V. Extraire la racine carrée de l'expression

$$(a^2+ab+b^2)(c^2+cd+d^2)-(bc-ad)^2-(bc-ad)(ac+ad+bd).$$

VI. Extraire la racine cubique de l'expression

$$a^3+b^3+c^3+d^3-(a+b)^3-(a+c)^3-(a+d)^3-(b+c)^3-(b+d)^3$$
$$-(c+d)^3+(a+b+c)^3+(a+b+d)^3+(b+c+d)^3+(a+c+d)^3.$$

VII. Résoudre l'équation

$$\frac{1}{p^3q^3}=\frac{1}{(p+q)^3}\left(\frac{1}{p^3}+\frac{1}{q^3}\right)+\frac{3}{(p+q)^4}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}\right)+\frac{6}{x^5}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right).$$

VIII. Résoudre l'équation

$$\frac{1}{p^4q^3}-\frac{1}{p^3q^4}=\frac{1}{(p+q)^3}\left(\frac{1}{p^4}-\frac{1}{q^4}\right)+\frac{2}{(p+q)^4}\left(\frac{1}{p^3}-\frac{1}{q^3}\right)$$
$$+\frac{2}{x^5}\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{q^2}\right).$$

IX. Extraire la racine carrée de l'expression

$$\sqrt[x]{a^{-\frac{3}{y}}}+\sqrt[r]{a^{\frac{1}{y}}b}+2\sqrt[2]{\sqrt[r]{b}}\sqrt[2]{\sqrt[x]{\sqrt[y]{\sqrt[r]{a^{-2r}}}}}.$$

Digitized by Google

CHAPITRE XV.

MÉTHODE DES COEFFICIENTS INDÉTERMINÉS.

---

162. Lorsqu'on cherche à déterminer, d'après certaines conditions, un polynome ordonné par rapport à une lettre donnée, la méthode la plus simple et la plus naturelle consiste à écrire ce polynome en laissant indéterminés ses coefficients et quelquefois son degré. En exprimant ensuite qu'il satisfait aux conditions proposées, on obtient des équations dans lesquelles ces coefficients et ce degré entrent comme autant d'inconnues dont elles font connaître la valeur.

Cette méthode peut s'appliquer à la solution de deux questions déjà résolues plus haut, la division des polynomes et l'extraction de leurs racines. Nous allons indiquer cette seconde manière de présenter la théorie de ces opérations, et l'on verra sans peine qu'elle conduit précisément aux mêmes calculs que les méthodes déjà exposées.

163. Soient à diviser, l'un par l'autre, deux polynomes de degrés m et n,

$$Ax^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_m \quad \Big| \quad \underline{Bx^n + B_1x^{n-1} + \ldots + B_n}$$

Il faut que le quotient, multiplié par le diviseur, reproduise identiquement le dividende. Or, si l'on désigne par α le degré du quotient, celui du produit sera $n+\alpha$, et l'on devra, par conséquent, avoir

$$n + \alpha = m,$$

ou

$$\alpha = m - n;$$

connaissant ainsi le degré du quotient et, par suite, le nombre de ses coefficients égal à $\alpha+1$, on pourra, en désignant chacun d'eux par une lettre particulière, effectuer le produit du quo-

tient par le diviseur. Ce produit étant de degré m, sera composé de $m+1$ termes; en les égalant aux termes correspondants du dividende, on obtiendra $m+1$ équations du premier degré entre les $m-n+1$ coefficients inconnus. $m-n+1$ de ces équations suffiront pour les déterminer; les autres devront être satisfaites d'elles-mêmes et seront des équations de condition.

164. Si l'on veut appliquer la méthode des coefficients indéterminés à la recherche du quotient et du reste dans le cas où la division n'est pas possible, la question doit être posée de la manière suivante :

Trouver un polynome qui, multiplié par le diviseur, donne un produit dont la différence avec le dividende, soit de degré moindre que le diviseur.

On devra donc seulement égaler, aux termes correspondants du dividende, ceux des termes de ce produit dont le degré surpasse le degré n du diviseur, on obtiendra ainsi $m-n+1$ équations (les mêmes que si l'on cherchait un quotient exact) qui permettront de déterminer tous les coefficients du quotient. La différence entre le dividende et le produit du quotient par ce diviseur sera le reste.

165. Les $m-n+1$ équations qui déterminent le quotient offrent une forme remarquable, qui rend leur solution très-facile.

Soit $$Cx^{m-n}+C_1x^{m-n-1}+\ldots C_kx^{m-n-k}+\ldots C_{m-n}$$
le quotient inconnu.

La première équation ne contient que l'inconnue C; C étant connu, la seconde permettra de calculer C_1, qui n'y entre qu'au premier degré; C et C_1 étant connus, la troisième équation permettra de calculer C_2, qui n'y entre qu'au premier degré. En général, chaque équation renferme au premier degré une inconnue qui ne figurait pas dans les précédentes et qu'elle permet de déterminer.

Pour démontrer qu'il en est ainsi, remarquons qu'en formant le produit de

$$Bx^n+B_1x^{n-1}+\ldots+B_n$$

par $$Cx^{m-n}+C_1x^{m-n-1}+\ldots+C_kx^{m-n-k}+\ldots+C_{m-n},$$

C_k ne figurera dans aucun terme de degré plus élevé que $m-k$; en sorte que les k premières équations ne renfermeront pas cette inconnue; quant à la $(k+1)^{me}$, elle renferme C_k au premier degré, car, dans le produit, le seul terme en x^{m-k} qui contienne C_k est évidemment BC_kx^{m-k}.

166. Appliquons la méthode précédente à un exemple. Soit à diviser

$$x^6 + A_1x^5 + A_2x^4 + A_3x^3 + A_4x^2 + A_5x + A_6$$

par

$$x^2 + px + q,$$

le quotient doit être du quatrième degré. Désignons-le, par,

$$x^4 + m_1x^3 + m_2x^2 + m_3x + m_4,$$

en formant son produit par le diviseur, on obtient

$$x^6 + (p+m_1)x^5 + (q+m_1p+m_2)x^4 + (m_1q+m_2p+m_3)x^3 \\ + (m_2q+m_3p+m_4)x^2 + (m_3q+m_4p)x + m_4q,$$

en égalant les termes de ce produit dont le degré surpasse l'unité aux termes correspondants du dividende, on aura, pour déterminer m_1, m_2, m_3, m_4, les équations

$$p+m_1=A_1, \quad q+m_1p+m_2=A_2, \quad m_1q+m_2p+m_3=A_3, \\ m_2q+m_3p+m_4=A_4;$$

la première fera connaître m_1; m_1 étant connu, la seconde fera connaître m_2; m_1 et m_2 étant connus, la troisième fera connaître m_3; et enfin la dernière déterminera m_4.

167. La méthode des coefficients indéterminés s'applique sans difficulté, à l'extraction de la racine d'un polynome.

[illegible]it un polynome

$$Ax^p + A_1x^{p-1} + \ldots + A_p,$$

[illegible]ine m^{me} par

$$[illegible] + B_1x^{n-1} + \ldots + B_n,$$

il faut, par définition, que l'on ait identiquement

$$(Bx^n + B_1x^{n-1} + \ldots + B_n)^m = Ax^p + A_1x^{p-1} + \ldots + A_p;$$

pour que les deux membres soient de même degré, on devra avoir

$$p = mn.$$

Si donc p n'est pas un multiple de m, le problème est impossible. Si p est divisible par m, on connaîtra le degré $\frac{p}{m}$ de la racine, et, par suite, le nombre de ses coefficients. On pourra élever cette racine à la puissance m; le résultat sera un polynome de degré p, et en égalant les $p+1$ premiers termes aux termes correspondants du polynome proposé, on aura $p+1$ équations pour déterminer les coefficients inconnus. Les équations qui expriment l'égalité des termes suivants devront être satisfaites d'elles-mêmes: ce sont des équations de condition.

168. Les $p+1$ équations qui déterminent les coefficients de la racine ont une forme remarquable qui rend leur résolution très-facile.

La première équation ne contient que l'inconnue B.

B étant connu, la seconde permettra de calculer B_1 qui n'y entre qu'au premier degré.

B et B_1 étant connus, la troisième équation permettra de calculer B_2 qui n'y entre qu'au premier degré. En général, chaque équation renferme au premier degré, une inconnue qui ne figurait pas dans les précédentes et qu'elle permet de déterminer.

Pour démontrer qu'il en est ainsi, remarquons qu'en formant le développement de

$$[Bx^n + B_1x^{n-1} + B_2x^{n-2} + \ldots + B_kx^{n-k} + \ldots + B_n]^m,$$

B_k ne figure dans aucun terme dont le degré en n soit plus élevé que $mn-k$; en sorte que les k premières équations ne contiendront pas cette inconnue. Quant à la $(k+1)^{me}$, elle le renferme au premier degré, car dans le développement

de la puissance m du polynome, il n'y a qu'un terme en x^{mn-k} dans lequel figure B_k, c'est

$$mB_k x^{n-k}(Bx^n)^{m-1}.$$

Application à quelques problèmes.

169. Nous appliquerons la méthode des coefficients indéterminés à des problèmes que nous n'avons pas encore traités.

PROBLÈME I. *Déterminer la relation nécessaire pour que le trinome*

$$x^3+px+q$$

soit divisible par le carré d'un binome convenablement choisi $(x-\alpha)^2$.

Si $x+\beta$ désigne le quotient de cette division, on aura

$$\begin{aligned} x^3+px+q &= (x-\alpha)^2(x+\beta) = (x^2-2\alpha x+\alpha^2)(x+\beta) \\ &= x^3+(\beta-2\alpha)x^2+(\alpha^2-2\alpha\beta)x+\alpha^2\beta, \end{aligned}$$

d'où l'on conclut en identifiant les deux membres,

$$\beta-2\alpha=0, \quad p=\alpha^2-2\alpha\beta, \quad q=\alpha^2\beta;$$

remplaçant dans la seconde et la troisième de ces équations β par sa valeur 2α, déduite de la première, il vient

$$p=\alpha^2-4\alpha^2=-3\alpha^2$$
$$q=2\alpha^3;$$

la première de ces équations donne $\alpha=\sqrt{\frac{-p}{3}}$, ce qui met la seconde sous la forme

$$q=2\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)^3,$$

ou

$$4p^3+27q^2=0.$$

PROBLÈME II. *Déterminer les coefficients* m *et* n, *de telle manière que l'expression*

$$mx^3-x^2(2m^2+3n)+x(m^3+6mn)-3m^2n$$

soit un cube parfait.

Il faut, pour cela, identifier cette expression avec le cube d'un binome $ax+b$, c'est-à-dire avec

$$a^3x^3+3a^2bx^2+3ab^2x+b^3,$$

ce qui fournit les équations

$$a^3=m,\quad -(2m^2+3n)=3a^2b,\quad m^3+6mn=3ab^2,\quad -3m^2n=b^3;$$

les deux dernières donnent

$$b=-\sqrt[3]{3m^2n},\quad a=\frac{m^3+6mn}{3\sqrt[3]{9m^4n^2}};$$

a et b étant déterminés, les deux équations restantes sont des équations de condition. Si on y substitue à a et à b leurs valeurs, elles deviennent

[1] $$m=\frac{(m^3+6mn)^3}{27.9.m^4n^2},$$

[2] $$2m^2+3n=\frac{3.(m^3+6mn)^2\sqrt[3]{3m^2n}}{9.\sqrt[3]{81m^8n^4}}=\frac{(m^3+6mn)^2}{3\sqrt[3]{27m^6n^3}}=\frac{(m^3+6mn)^2}{9m^2n};$$

en chassant les dénominateurs dans cette dernière équation et supprimant le facteur commun m^2, elle devient

$$(2m^2+3n)9n=m^4+12m^2n+36n^2,$$

ou en réduisant

$$0=9n^2-6m^2n+m^4$$

qui donne pour valeur unique de n

$$n=\frac{m^2}{3},$$

cette valeur de n, substituée dans l'équation [1], la rend identique; la condition demandée se réduit donc à

$$n=\frac{m^2}{3}$$

et le polynome proposé est alors, comme on s'en assure facilement, le cube de

$$x\sqrt[3]{m}-m\sqrt[3]{m}.$$

Digitized by Google

RÉSUMÉ.

162. La méthode des coefficients indéterminés s'applique aux questions dans lesquelles on veut déterminer un polynome d'après certaines conditions. — **163**. Application de cette méthode à la théorie de la division. — **164**. Cas où l'on cherche le quotient et le reste. — **165**. Toutes les équations que l'on a à résoudre sont du premier degré à une inconnue. — **166**. Application à un exemple. — **167**. Racine des polynomes. — **168**. Les équations que l'on a à résoudre pour déterminer les coefficients de la racine sont toutes du premier degré à une inconnue. — **169**. Application de la méthode des coefficients indéterminés à la solution de quelques problèmes.

EXERCICES.

I. Conditions pour que

$$4x^4 - 4px^3 + 4qx^2 + 2p(m+1)x + (m+1)^2$$

soit le carré d'un polynome entier par rapport à x.

II. Conditions pour que

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F$$

soit le produit de deux expressions du premier degré en x et y. Décomposer de cette manière

$$2x^2 - 21xy - 11y^2 - x + 34y - 3.$$

III. Mettre l'expression

$$4(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

sous la forme de la différence des carrés de deux polynomes entiers, du second degré, et par rapport à x.

IV. Conditions pour que

$$k(a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2) - (x-\alpha)^2 - (y-\beta)^2$$

soit le carré d'un polynome en x et y.

V. Mettre $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ sous la forme $(\alpha x + \beta y)^2 + (\gamma x + \delta y)^2$. Cela est-il toujours possible? y a-t-il plusieurs solutions?

VI. Mettre $Ax^3 + 3Bx^2 + 3Cy^2x + Dy^3$ sous la forme

$$(\alpha x + \beta y)^3 + (\gamma x + \delta y)^3.$$

CHAPITRE XVI.

VÉRIFICATION DES FORMULES D'ALGÈBRE.

Condition d'identité de deux polynomes.

170. La vérification d'une formule d'algèbre consiste presque toujours, ou, tout au moins, se ramène très-facilement, à démontrer l'égalité de deux expressions algébriques. Nous allons indiquer un théorème fort important, qui peut guider dans la solution des questions de ce genre.

THÉORÈME. *Deux polynomes entiers et rationnels qui renferment un nombre quelconque de lettres arbitraires, et indépendantes les unes des autres, ne peuvent être égaux que s'ils sont composés identiquement des mêmes termes.*

Considérons d'abord deux polynomes qui ne contiennent qu'une seule lettre indéterminée par rapport à laquelle nous les supposerons ordonnés. Soient ces polynomes

$$[1] \qquad Px^m + P_1x^{m-1} + P_2x^{m-2} + \ldots P_{m-1}x + P_m$$

$$[2] \qquad Qx^n + Q_1x^{n-2} + Q_2x^{n-1} + \ldots Q_{n-1}x + Q_n$$

P, $P_1, \ldots P_n$, Q, $Q_1, \ldots Q_n$ étant des nombres déterminés.

Si les deux polynomes [1] et [2] doivent être égaux quel que soit x, ils le seront, en particulier, pour $x = 0$, et par conséquent, on doit avoir $P_m = Q_n$. En supprimant ces deux termes communs, les restes seront encore égaux, et en les divisant l'un et l'autre par x, on devra encore trouver des quotients égaux; on aura donc

$$Px^{m-1} + P_1x^{m-2} + \ldots + P_{m-1} = Qx^{n-1} + Q_1x^{n-2} + \ldots + Q_{n-1}.$$

En faisant encore $x = 0$ dans les deux membres, on verra, de même, que l'on doit avoir $P_{m-1} = Q_{n-1}$. En supprimant ces termes communs et divisant le résultat par x, on trouve

$$Px^{m-2} + P_1x^{m-3} + \ldots + P_{m-2} = Qx^{m-2} + Q_1x^{n-3} + \ldots + Q_{n-2};$$

d'où l'on conclura encore $P_{m-2} = Q_{n-2}$, et en continuant on

verra que les termes devront être, dans les deux polynomes, les mêmes et en même nombre.

Remarque. On pourrait objecter à la démonstration précédente, qu'après avoir divisé par x les deux polynomes égaux, on n'a plus le droit (43) de supposer $x = 0$ dans le résultat. Mais comme on peut attribuer à x toute autre valeur aussi petite qu'on le voudra, il n'en est pas moins vrai que les termes indépendants de cette lettre ne peuvent différer l'un de l'autre.

171. Pour établir le théorème dans le cas où les deux polynomes renferment un nombre quelconque de variables, il suffit de montrer que, si la proposition est vraie pour deux polynomes renfermant n lettres arbitraires, elle le sera aussi pour deux polynomes en contenant $n+1$. Considérons, pour cela, deux polynomes contenant $n+1$ lettres, $x, y, z, u, v \ldots p$; ordonnons-les, l'un et l'autre, par rapport à l'une de ces lettres, x par exemple : ils prendront la forme :

$$[1] \qquad A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m$$
$$[2] \qquad B_0x^n + B_1x^{n-1} + \ldots + B_n,$$

A_0, $A_1 \ldots A_m$, B_0, $B_1 \ldots B_n$ contenant les n variables y, z, $u \ldots p$; mais les polynomes [1] et [2] étant égaux, quel que soit x, on doit avoir

$$[3] \qquad m = n, \; A_0 = B_0, \; A_1 = B_1 \; \ldots \; A_m = B_n;$$

or le théorème étant admis pour le cas de n lettres variables, les égalités [3] exigent que les polynomes A_0 et B_0, A_1 et B_1, A_m et B_n soient respectivement composés des mêmes termes, et que, par conséquent, les polynomes [1] et [2] soient identiquement les mêmes.

Vérification de l'égalité de deux expressions algébriques.

172. D'après le théorème précédent, pour vérifier une équation entre différentes quantités arbitraires, il suffira d'en faire disparaître tous les dénominateurs et les radicaux, et de constater que les deux membres sont identiquement composés des mêmes termes. Si cela n'a pas lieu, on peut affirmer que l'égalité proposée n'est pas exacte pour toutes les valeurs des lettres qu'elle renferme.

173. Lorsqu'une égalité doit avoir lieu en vertu de certaines

Digitized by Google

relations entre les lettres qui y sont contenues, il faut, pour le vérifier, exprimer, au moyen de ces relations, un certain nombre de lettres en fonction de celles que l'on peut regarder comme arbitraires, et substituer ces valeurs dans l'équation proposée, qui rentrera alors dans le cas précédent.

Application à quelques problèmes.

174. Problème I. *Examiner si les équations*

[1] $$\frac{\gamma}{c_1}+\frac{c}{\gamma_2}=1$$

[2] $$\frac{\gamma_1}{c_2}+\frac{c_1}{\gamma}=1$$

entraînent la suivante

[3] $$cc_1c_2+\gamma\gamma_1\gamma_2=0.$$

On déduit des équations [1] et [2]

[4] $$\gamma=c_1-\frac{cc_1}{\gamma_2}=\frac{c_1(\gamma_2-c)}{\gamma_2},$$

[5] $$\gamma_1=c_2-\frac{c_1c_2}{\gamma},$$

ou, en remplaçant, dans [5], γ par sa valeur fournie par l'équation [4]

[6] $$\gamma_1=\frac{-cc_2}{\gamma_2-c},$$

si l'on remet dans [3] pour γ et γ_1 leurs valeurs fournies par [4] et [6], on obtient

$$cc_1c_2-\frac{c_1(\gamma_2-c)cc_2\gamma_2}{\gamma_2(\gamma_2-c)}=0,$$

ce qui devient une identité lorsque l'on supprime le facteur $(\gamma_2-c)\gamma_2$ commun au numérateur et au dénominateur du second terme.

Problème II. *Examiner si l'égalité,*

[1] $$\frac{ad-bc}{a-b-c+d}=\frac{ac-bd}{a-b-d+c};$$

entraîne

[2] $$\frac{ac-bd}{a-b-d+c}=\frac{a+b+c+d}{4}.$$

Il faut, conformément à la méthode indiquée, déduire de l'égalité [1] la valeur de l'une des quatre lettres qu'elle contient, et substituer cette valeur dans [2], qui doit alors devenir identique.

Si l'on chasse les dénominateurs de [1], il vient

$$a^2d + ad(b + d - c) - bca + bc(b + d - c) = a^2c - abd - ac(b + c - d) + bd(b + c - d),$$

ou, en réunissant les termes en a et réduisant

$$[3] \quad a^2(d - c) + a(c^2 - d^2) + b^2(c - d) + b(d^2 - c^2) = 0,$$

ou, en divisant par $d - c$,

$$a^2 - b^2 - a(c + d) + b(d + c) = 0,$$

ce qui peut s'écrire

$$[4] \qquad a^2 - b^2 + (b - a)(c + d) = 0,$$

ou, en divisant par $a - b$,

$$a + b - c - d = 0,$$

c'est-à-dire $$a = c + d - b.$$

Si l'on remet cette valeur de a dans l'équation [2], elle devient

$$\frac{c^2 + cd - cb - bd}{2c - 2b} = \frac{2c + 2d}{4},$$

ou, en chassant les dénominateurs,

$$4(c^2 + cd - cb - bd) = (2c + 2d)(2c - 2b),$$

ce qui, en effet, a lieu identiquement.

Remarque. Nous avons supprimé, dans les équations [3] et [4], les facteurs $a - b$ et $d - c$: le résultat n'est donc applicable que dans le cas où les deux différences ne sont pas nulles. On peut vérifier en effet que, pour $a = b$, l'équation [1] devient identique et ne peut, par conséquent, entraîner aucune conséquence.

Digitized by Google

RÉSUMÉ.

170. Théorème sur les conditions d'égalité de deux polynomes contenant une lettre arbitraire. — **171.** Extension de ce théorème au cas où les deux polynomes renferment un nombre quelconque de lettres arbitraires. — **172.** Moyen de vérifier une équation entre différentes quantités arbitraires. — **173.** Lorsque les lettres contenues dans l'équation à vérifier doivent satisfaire à certaines équations, il faut exprimer, au moyen de ces équations, un certain nombre de lettres en fonction de celles que l'on peut regarder comme arbitraires et substituer ces valeurs dans l'équation proposée qui rentrera alors dans le cas précédent. — **174.** Application à quelques exemples.

EXERCICES.

I. Vérifier que

$$x+y+u+v=2$$
$$2xy-uv=2(u+v)+2$$

entraînent

$$x^2+y^2=u^2+r^2.$$

II. Vérifier que $a+c=2b$, $\frac{1}{b}+\frac{1}{d}=\frac{2}{c}$,

entraînent

$$a:b::c:d.$$

III. Vérifier que le volume d'un segment sphérique à deux bases $\frac{1}{6}\pi H^3+\pi H\left(\frac{R^2+r^2}{2}\right)$ est la différence de deux segments à une base ayant R et r pour rayons de bases, c'est-à-dire qu'il est égal à

$$\frac{1}{6}\pi H'^3+\frac{\pi H'R^2}{2}-\frac{1}{6}\pi h'^3-\frac{\pi h'r^2}{2},$$

H′, h' satisfaisant aux conditions que la géométrie indique facilement : $H'-h'=H$, $\rho^2=R^2+(\rho-H')^2$, $\rho^2=r^2+(\rho-h')^2$, ρ étant le rayon de la sphère.

IV. Vérifier que

$$\sqrt{Aa}+\sqrt{Bb}+\sqrt{Cc}+\sqrt{Dd}=\sqrt{(A+B+C+D)(a+b+c+d)},$$

si l'on a

$$A:a::B:b::C:c::D:d.$$

V. Si l'on désigne par S_m la somme des m premiers termes d'une progression par quotient, dont q est la raison, la somme

des produits deux à deux de ces m premiers termes est

$$\frac{q}{q+1} S_m S_{m-1}.$$

VI. Si l'on considère la suite 1.2.3.5.8.13... dans laquelle chaque terme est la somme des deux précédents; prouver que la différence entre le carré d'un terme et le produit des deux qui le comprennent est, en valeur absolue, égale à l'unité.

VII.

$$\sqrt{(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2}+\sqrt{(y-\beta')^2+(x-\alpha')^2}=\sqrt{(\beta-\beta')^2+(\alpha-\alpha')^2},$$

entraîne
$$\frac{y-\beta}{x-\alpha}=\frac{y-\beta'}{x-\alpha'}.$$

VIII. Les équations

$$\begin{aligned} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2&=1, & \alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''&=0,\\ \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2&=1, & \alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'&=0,\\ \alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2&=1, & \alpha\alpha''+\beta\beta''+\gamma\gamma''&=0, \end{aligned}$$

entraînent les suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha''\beta''&=0, & \alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2&=1,\\ \alpha\gamma+\alpha'\gamma'+\alpha''\gamma''&=0, & \beta^2+\beta'^2+\beta''^2&=1,\\ \beta\gamma+\beta'\gamma'+\beta''\gamma''&=0, & \gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2&=1, \end{aligned}$$

$$\alpha^2\alpha'^2\alpha''^2+\beta^2\beta'^2\beta''^2+\gamma^2\gamma'^2\gamma''^2=\alpha^2\beta^2\gamma^2+\alpha'^2\beta'^2\gamma'^2+\alpha''^2\beta''^2\gamma''^2.$$

IX. L'équation $\dfrac{1}{a+x}+\dfrac{1}{b+x}=\dfrac{1}{a'+x}+\dfrac{1}{b'+x}$

ne peut avoir lieu, quel que soit x, que si a et b sont respectivement égaux à a' et b'.

X. L'équation $\dfrac{a}{(b+x)^2+a^2}=\dfrac{a'}{(b'+x)^2+a'^2}$

ne peut avoir lieu, quel que soit x, que si l'on a $a=a'$, $b=b'$.

XI. Les équations

$$\begin{aligned} aa_1+bc&=\beta\gamma, & \beta\beta'+bb'&=a_1c_1,\\ a'a_1+b'c'&=\beta'\gamma', & \gamma\gamma'+cc'&=a_1b_1, \end{aligned}$$

entraînent

$$a_1b_1c_1=aa'a_1+bb'b_1+cc'c_1+abc+a'b'c'.$$

Digitized by Google

CHAPITRE XVII.

SUR LES EXPRESSIONS IMAGINAIRES.

Définitions et notations.

175. La résolution des équations du second degré conduit, dans certains cas, à des expressions qui n'ont aucune valeur numérique, et renferment l'indication d'opérations impossibles à effectuer. C'est dans un but de généralisation que l'on a été conduit à employer ces expressions imaginaires. Nous avons vu, par exemple, qu'en les adoptant, on a l'avantage de pouvoir énoncer sans restriction des théorèmes tels que les suivants :

Toute équation du second degré a deux racines.

Dans toute équation du second degré de la forme $x^2+px+q=0$, la somme des racines est égale au coefficient du second terme, pris en signe contraire, et leur produit au terme tout connu.

Ces avantages, qui dans le cas que nous citons sont à peu près insignifiants, deviennent très-importants dans la théorie générale des équations.

Les expressions imaginaires peuvent aussi être introduites utilement dans la solution de quelques questions, comme nous le montrerons dans ce chapitre.

176. On donne le nom d'expression imaginaire à une expression de la forme $a+\sqrt{-K}$, $-K$ désignant un nombre négatif. $\sqrt{-K}$ n'est pas un nombre, en ce sens qu'il ne peut servir de mesure à aucune grandeur; mais il peut figurer utilement dans les calculs, d'après cette condition que son carré soit toujours remplacé par $-K$. Si l'on applique, en outre, aux nombres imaginaires toutes les règles demontrées généralement pour les nombres réels, les opérations relatives à ces nombres seront suffisamment définies et fourniront toujours, comme on le verra, des résultats de même forme qu'eux.

Digitized by Google

177. —K, étant négatif, peut être représenté par un carré pris en signe contraire, $-b^2$, le type d'une expression imaginaire, devient alors

$$a+\sqrt{-b^2},$$

que l'on écrit souvent $\quad a+b\sqrt{-1}$.

REMARQUE. On substitue à $\sqrt{-b^2}$ l'expression $b\sqrt{-1}$, en vertu de la convention faite plus haut : appliquer aux nombres imaginaires toutes les règles démontrées généralement pour des nombres réels. $-b^2$ peut être considéré, en effet, comme le produit $b^2\times(-1)$, et, en vertu d'une règle démontrée généralement pour les nombres réels, on peut faire sortir le facteur b^2 du radical.

178. Quels que soient les nombres réels a et b, l'expression imaginaire

$$a+b\sqrt{-1}$$

est racine d'une équation de second degré

$$(x-a)^2+b^2=0.$$

La seconde racine de cette équation est, comme on le voit facilement,

$$a-b\sqrt{-1}.$$

$a+b\sqrt{-1}$ et $a-b\sqrt{-1}$ se nomment des expressions imaginaires conjuguées : elles jouissent, évidemment, de la propriété d'avoir une somme réelle $2a$ et un produit réel a^2+b^2.

Puissances de $\sqrt{-1}$.

179. Dans les calculs que l'on effectue sur les expressions de la forme $a+b\sqrt{-1}$, on applique (**176**) à ces expressions toutes les règles du calcul algébrique, en opérant comme si $\sqrt{-1}$ était un nombre. Quelques géomètres représentent ce symbole par une lettre i, et dans les résultats, ils remplacent i^2 par -1 : les puissances successives de i ou $\sqrt{-1}$ se trouvent par là déterminées.

$$(\sqrt{-1})^3=i^3=i^2\times i=-\sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^4=i^4=(i^2)^2=1$$
$$(\sqrt{-1})^5=i^5=i^4.i=\sqrt{-1},$$

et ainsi de suite. On a, en général, n désignant un nombre entier,

$$(\sqrt{-1})^{4n} = (i^4)^n = 1$$
$$(\sqrt{-1})^{4n+1} = i^{4n}.i = \sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^{4n+2} = i^{4n}.i^2 = -1$$
$$(\sqrt{-1})^{4n+3} = i^{4n}.i^3 = -\sqrt{-1}.$$

Toutes ces conventions sont nécessaires si l'on veut pouvoir appliquer aux calculs faits sur les expressions imaginaires les règles générales relatives aux nombres réels. Elles permettent de démontrer le théorème suivant, qui est fort important :

Produit des expressions imaginaires.

180. Théorème. *Si l'on considère un nombre quelconque d'expressions imaginaires :*

$$(a_1 + b_1\sqrt{-1}),\ (a_2 + b_2\sqrt{-1}),\ (a_3 + b_3\sqrt{-1})\ \ldots\ (a_n + b_n\sqrt{-1}),$$

que l'on effectue leur produit d'après les règles de la multiplication algébrique, en remplaçant les puissances de $\sqrt{-1}$ par les valeurs indiquées plus haut, quel que soit l'ordre dans lequel on opère, le résultat sera identiquement le même, c'est-à-dire que l'on obtiendra la même partie réelle et le même coefficient pour $\sqrt{-1}$.

Si nous remplaçons en effet $\sqrt{-1}$ par i, on sait que le résultat sera identiquement le même, quel que soit l'ordre que l'on adopte pour les multiplications successives, et que les coefficients des mêmes puissances de i auront dans tous les cas les mêmes valeurs. Si donc, dans les polynomes identiques, on remplace les puissances de i par les valeurs indiquées plus haut, savoir :

$$i^{4n} \text{ par } 1$$
$$i^{4n+1} \text{ par } \sqrt{-1}$$
$$i^{4n+2} \text{ par } -1$$
$$i^{4n+3} \text{ par } -\sqrt{-1},$$

les résultats ne sauraient être différents; or il est tout à fait indifférent de remplacer, à la fin du calcul, chaque puissance de

i par sa valeur, ou de faire successivement les substitutions après chaque opération partielle : car ces substitutions se réduisent toutes à remplacer deux facteurs égaux à i par le facteur -1, et peu importe qu'on le fasse en une fois ou successivement.

181. Nous donnerons immédiatement une application du théorème précédent.

Considérons le produit

$$P=(a+b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})(c-d)\sqrt{-1});$$

si on multiplie les deux premiers facteurs, on trouve

$$(a+b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1})=(ac-bd)+(ad+bc)\sqrt{-1},$$

et en multipliant les deux derniers,

$$(a-b\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1})=(ac-bd)-(ad+bc)\sqrt{-1};$$

en sorte que

$$P=[(ac-bd)+(ad+bc)\sqrt{-1}][(ac-bd)-(ad+bc)\sqrt{-1}],$$

ou, en effectuant,

$$P=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2.$$

D'un autre côté, en multipliant le premier facteur par le troisième, et le second par le quatrième, on a

$$(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})=a^2+b^2$$

$$(c+d\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1})=c^2+d^2;$$

donc $$P=(a^2+b^2)(c^2+d^2),$$

ce qui donne la formule

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2,$$

laquelle est, du reste, extrêmement facile à vérifier.

Introduction des lignes trigonométriques dans les expressions imaginaires.

182. Les expressions imaginaires peuvent se mettre sous une forme particulière qui simplifie souvent les calculs auxquels on doit les soumettre.

Digitized by Google

Soit l'expresssion

$$a + b\sqrt{-1};$$

si l'on pose

[1] $$a = \rho \cos \varphi$$

[2] $$b = \rho \sin \varphi,$$

on pourra, quels que soient a et b, trouver pour ρ une valeur positive, et pour φ une valeur moindre que 2π, qui satisfasse à ces deux équations; il suffira de prendre

[3] $$\rho^2 = a^2 + b^2$$

[4] $$tang\, \varphi = \frac{b}{a}.$$

Les équations [3] et [4] se déduisent, en effet, de [1] et [2] en ajoutant leurs carrés, et en les divisant membre à membre. Réciproquement, si ρ et φ ont les valeurs indiquées par les équations [3] et [4], on aura

$$\cos \varphi = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + tang^2 \varphi}} = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}} = \frac{a}{\pm\sqrt{b^2 + a^2}}$$

$$\sin \varphi = \frac{tang \varphi}{\pm\sqrt{1 + tg^2 \varphi}} = \frac{\frac{b}{a}}{\pm\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}} = \frac{b}{\pm\sqrt{b^2 + a^2}},$$

et en remplaçant $\sqrt{b^2 + a^2}$ par ρ,

$$\cos \varphi = \frac{a}{\pm \rho}$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{\pm \rho},$$

c'est-à-dire

$$a = \pm \rho \cos \varphi$$

$$b = \pm \rho \sin \varphi,$$

ce qui coïncidera avec les équations [1] et [2], si l'on a soin de prendre pour φ celui des deux angles qui, ayant pour tangente $\frac{b}{a}$, a son cosinus de même signe que b.

Digitized by Google

D'après ce qui précède, une expression imaginaire $a+b\sqrt{-1}$ peut toujours se mettre sous la forme

$$\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi),$$

et ne peut évidemment s'y mettre que d'une seule manière (ρ devant être positif et φ moindre que 2π).

ρ se nomme le module et φ l'argument de cette expression imaginaire. Nous allons voir qu'il y a un avantage de simplicité à mettre les expressions imaginaires sous cette forme.

Multiplication et division des expressions imaginaires.

183. Soit à multiplier les deux expressions

$$\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)$$
$$\rho'(\cos\varphi'+\sqrt{-1}\sin\varphi').$$

En effectuant le produit et remplaçant seulement le carré de $\sqrt{-1}$ par -1, on trouve

$$\rho\rho'[\cos\varphi\cos\varphi'-\sin\varphi\sin\varphi'+\sqrt{-1}(\cos\varphi\sin\varphi'+\sin\varphi\cos\varphi')]$$
$$=\rho\rho'[\cos(\varphi+\varphi')+\sqrt{-1}\sin(\varphi+\varphi')];$$

par conséquent, *pour multiplier l'une par l'autre deux expressions imaginaires, il faut multiplier les modules et ajouter les arguments.*

La règle précédente permet évidemment de faire le produit d'un nombre quelconque d'expressions imaginaires.

184. Pour diviser, l'une par l'autre, deux expressions imaginaires, il suffit évidemment de diviser les modules et de retrancher les arguments. On a en effet

$$\frac{\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)}{\rho'(\cos\varphi'+\sqrt{-1}\sin\varphi')}=\frac{\rho}{\rho'}[\cos(\varphi-\varphi')+\sqrt{-1}\sin(\varphi-\varphi')].$$

Cette égalité devient évidente si l'on chasse le dénominateur et que l'on effectue la muliplication du second membre, d'après la règle donnée précédemment.

Puissances d'une expression imaginaire.

185. Si l'on suppose que les expressions à multiplier deviennent toutes égales entre elles, les théorèmes précédents prouvent que

La puissance entière d'une expression imaginaire a pour module la puissance correspondante du module, et pour argument le produit de l'argument par l'indice de la puissance. Ainsi l'on a

$$[1]\quad [\rho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)]^m = \rho^m(\cos m\varphi + \sqrt{-1}\sin m\varphi).$$

Cette formule, très-importante en analyse, s'étend, comme nous allons le faire voir, au cas où m désigne un nombre fractionnaire ou négatif.

Supposons d'abord que m y soit remplacé par $\frac{1}{m'}$, m' étant entier, il s'agit de montrer que l'on a

$$[2]\quad [\rho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)]^{\frac{1}{m'}} = \rho^{\frac{1}{m'}}\left(\cos\frac{\varphi}{m'} + \sqrt{-1}\sin\frac{\varphi}{m'}\right).$$

Pour vérifier cette égalité, élevons les deux membres à la puissance m' : le premier donnera, évidemment, pour résultat

$$\rho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi),$$

et la règle donnée pour les puissances entières montre qu'il en est de même du second.

Remarque. $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ étant donnés, $\cos\frac{\varphi}{m}$ et $\sin\frac{\varphi}{m}$, ne sont pas complétement déterminés et restent susceptibles (voir la *Trigonométrie*) de plusieurs valeurs distinctes. Il en résulte aussi des valeurs distinctes pour l'expression

$$[\rho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)]^{\frac{1}{m'}},$$

leur discussion trouvera sa place dans la théorie des équations.

186. Si nous considérons maintenant le cas où l'exposant m

est remplacé par une fraction $\frac{m}{n}$, il faut prouver que

$$[3] \quad [\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)]^{\frac{m}{n}}=\rho^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m\varphi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{m\varphi}{n}\right).$$

En effet, élever une expression à la puissance $\frac{m}{n}$, c'est, par définition, en prendre la racine n^{me}, puis élever le résultat à la puissance m; or, les formules [1] et [2] permettent de faire successivement ces deux opérations et l'on est ainsi conduit à la formule [3].

Supposons enfin que m ait une valeur négative $-m'$, il faut prouver que l'on a

$$[\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)]^{-m'}=\rho^{-m'}(\cos-m'\varphi+\sqrt{-1}\sin-m'\varphi);$$

pour cela, remarquons que, par définition,

$$[\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)]^{-m'}=\frac{1}{[\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)]^{m'}},$$

ou $$\frac{1}{[\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)]^{m'}}=\frac{1}{\rho^{m'}(\cos m'\varphi+\sqrt{-1}\sin m'\varphi)},$$

mais (**184**), on a

$$\frac{1}{\rho^{m'}(\cos m'\varphi+\sqrt{-1}\sin m'\varphi)}=\frac{\cos 0+\sqrt{-1}\sin 0}{\rho^{m'}(\cos m'\varphi+\sqrt{-1}\sin m'\varphi)}$$
$$=\rho^{-m'}(\cos-m'\varphi+\sqrt{-1}\sin-m'\varphi),$$

ce qu'il fallait démontrer.

187. Nous indiquerons quelques applications des formules précédentes.

THÉORÈME. *Tout trinome de la forme*

$$x^4+px^2+q$$

est décomposable en deux facteurs réels du second degré.

Nous distinguerons deux cas :

1° Supposons que l'équation du second degré

$$z^2+pz+q=0$$

ait deux racines réelles α et β : on aura (88)

$$z^2+pz+q=(z-\alpha)(z-\beta),$$

et, par suite,

$$x^4+px^2+q=(x^2-\alpha)(x^2-\beta).$$

2° Supposons que l'équation

$$z^2+pz+q=0$$

ait deux racines imaginaires, $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, $\alpha-\beta\sqrt{-1}$: on aura

$$z^2+pz+q=(z-\alpha+\beta\sqrt{-1})(z-\alpha-\beta\sqrt{-1}),$$

et, par suite,

$$[1]\quad x^4+px^2+q=(x^2-\alpha+\beta\sqrt{-1})(x^2-\alpha-\beta\sqrt{-1});$$

l'équation [1] peut s'écrire

$$x^4+px^2+q=(x-\sqrt{\alpha+\beta\sqrt{-1}})(x+\sqrt{\alpha+\beta\sqrt{-1}})$$
$$(x-\sqrt{\alpha-\beta\sqrt{-1}})(x+\sqrt{\alpha-\beta\sqrt{-1}});$$

puis, en posant

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}=\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi),$$
$$\alpha-\beta\sqrt{-1}=\rho(\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi),$$

et, par suite (185),

$$\sqrt{\alpha+\beta\sqrt{-1}}=\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\sqrt{-1}\sin\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$\sqrt{\alpha-\beta\sqrt{-1}}=\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{2}-\sqrt{-1}\sin\frac{\varphi}{2}\right),$$

il vient

$$x^4+px^2+q=\left[x-\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\sqrt{-1}\sin\frac{\varphi}{2}\right)\right]$$
$$\left[x+\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\sqrt{-1}\sin\frac{\varphi}{2}\right)\right]\left[x-\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{2}-\sqrt{-1}\sin\frac{\varphi}{2}\right)\right]$$
$$\left[x+\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{2}-\sqrt{-1}\sin\frac{\varphi}{2}\right)\right],$$

ou, en réunissant le premier et le troisième facteur, et le se-

Digitized by Google

cond et le quatrième qui, évidemment, sont conjugués,

$$x^4+px^2+q=\left[\left(x-\sqrt{\rho}\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2+\rho\sin^2\frac{\varphi}{2}\right]$$
$$\left[\left(x+\sqrt{\rho}\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2+\rho\sin^2\frac{\varphi}{2}\right],$$

et le trinome est ainsi décomposé en deux facteurs réels du second degré.

Problème. *Exprimer* $\cos m\varphi$ *et* $\sin m\varphi$ *en fonction de* $\cos\varphi$ *et de* $\sin\varphi$.

On a

$$(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)^m=\cos m\varphi+\sqrt{-1}\sin m\varphi;$$

en développant le premier membre par la formule du binome et égalant le résultat au second membre, c'est-à-dire, écrivant que les parties réelles sont égales, ainsi que les parties imaginaires, on a

$$\cos m\varphi=\cos^m\varphi-\frac{m(m-1)}{2}\cos^{m-2}\varphi\sin^2\varphi$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\cos^{m-4}\varphi\sin^4\varphi+\ldots,$$

$$\sin m\varphi=m\cos^{m-1}\varphi\sin\varphi-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-3}\varphi\sin^3\varphi+\ldots$$

Problème. *Évaluer* $x^m+\frac{1}{x^m}$ *en fonction de* $x+\frac{1}{x}$.

Posons $$x+\frac{1}{x}=2\cos\varphi;$$

on en tire

$$x=\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi,$$
$$\frac{1}{x}=\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi,$$

et, par conséquent,

$$x^m+\frac{1}{x^m}=2\cos m\varphi,$$

de sorte que, la formule qui donne $\cos m\varphi$ en fonction de $\cos\varphi$, permettra de calculer $\dfrac{x^m+\frac{1}{x^m}}{2}$ en fonction de $x+\frac{1}{x}$.

Remarque. Pour obtenir la formule demandée, nous avons supposé à x une valeur imaginaire

$$x=\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi;$$

le résultat est-il suffisamment établi pour une valeur réelle quelconque de x? Pour démontrer que la formule est générale, il faut remarquer que si l'on chasse les dénominateurs, elle est de degré $2m$, et l'on démontrera, dans la théorie des équations, qu'elle doit alors être identique, si elle a lieu pour plus de $2m$ valeurs réelles ou imaginaires de la variable.

RÉSUMÉ.

175. On rappelle que les expressions imaginaires se sont introduites dans un but de généralisation dont l'importance devient plus grande encore dans la suite de l'algèbre. — 176. Une expression imaginaire n'étant la mesure d'aucune grandeur, n'est pas un nombre, mais à l'aide de conventions convenables, elle peut figurer utilement dans les calculs. — 177. On a l'habitude de donner aux expressions imaginaires la forme $a+b\sqrt{-1}$. — 178. Toute expression imaginaire est racine d'une équation du second degré, l'autre racine se nomme expression conjuguée. — 179. Puissances successives de $\sqrt{-1}$. — 180. Un produit de facteurs imaginaires ne change pas quand on intervertit les facteurs. — 181. Application du théorème précédent à la vérification d'une formule d'algèbre entre nombres réels. — 182. Expression trigonométrique des expressions imaginaires; définition du module et de l'argument. — 183. Produit de deux expressions imaginaires. — 184. Quotient de deux expressions imaginaires. — 185. Puissances d'une expression imaginaire. — 186. Extension du résultat obtenu au cas d'un exposant négatif ou fractionnaire. — 187. Application des formules précédentes à quelques résultats où ne figurent plus que des quantités réelles.

EXERCICES.

I. Démontrer, sans avoir recours à des expressions trigonométriques, que

$$\sqrt{a+b\sqrt{-1}} \text{ est de la forme } p+q\sqrt{-1}.$$

II. Trouver les racines réelles ou imaginaires de l'équation

$$2x\sqrt[3]{x}-3x\sqrt[3]{\frac{1}{x}}=20.$$

III. n désignant un nombre premier plus grand que 3, $(x+y)^n-x^n-y^n$ s'annulle pour $x=y\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$.

IV. Résoudre l'équation

$$x^6-2x^3\cos\varphi+1=0.$$

V. Quelles sont les expressions imaginaires dont la puissance m^{me} est réelle.

VI. Trouver une expression imaginaire dont le cube soit égal à l'unité. Il en existe deux dont chacune est le carré de l'autre.

VII. En nommant α l'expression dont le cube est égal à l'unité, vérifier la formule

$$(a+b+c)(a+b\alpha+c\alpha^2)(a+b\alpha^2+c\alpha)=a^3+b^3+c^3-3abc;$$

en déduire la démonstration de la formule indiquée chapitre III, exercice VII.

VIII. Le module de la somme de deux expressions imaginaires est plus petit que la somme de leurs modules et plus grand que leur différence.

CHAPITRE XVIII.

THÉORIE DES FRACTIONS CONTINUES.

Définitions.

188. Pour donner une valeur approchée d'un nombre N, le plus simple est d'indiquer sa partie entière. Si l'on désigne par a cette partie entière, la valeur exacte pourra être représentée par

$$N = a + \frac{1}{y}, \qquad [1]$$

$\frac{1}{y}$ étant moindre que l'unité, et, par suite, y plus grand que l'unité.

Pour donner une valeur approchée de y, on pourra encore évaluer sa partie entière, et poser, en la désignant par b,

$$y = b + \frac{1}{z},$$

z étant plus grand que l'unité. En substituant à y cette valeur dans l'expression [1], on obtient

$$N = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{z}}. \qquad [2]$$

On pourra de même évaluer la partie entière de z, et poser, en la désignant par c,

$$z = c + \frac{1}{u};$$

u étant plus grand que l'unité. Cette valeur de z, substituée dans [2], donne

$$[3] \qquad N = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{u}}}.$$

En remplaçant de même u par sa partie entière d, augmentée d'une quantité $\frac{1}{v}$, on aurait

$$[4] \qquad N = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{v}}}},$$

et l'on pourra continuer ainsi indéfiniment, à moins que l'un des nombres y, z, u, v ... ne se trouve entier, auquel cas l'opération s'arrêtera, en fournissant pour N une expression que l'on nomme une *fraction continue*.

189. Lors même que les opérations indiquées dans le paragraphe précédent ne se terminent pas, les égalités [1], [2], [3], [4] ... sont rigoureusement exactes. Mais si l'on néglige, dans ces égalités, les fractions $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{v}$ ..., qui sont moindres que l'unité, elles deviennent approximatives, et fournissent pour N une série de valeurs approchées que l'on nomme des *réduites*.

Les nombres b, c, d, e ..., qui sont les parties entières des dénominateurs successifs x, y, z, se nomment des *quotients incomplets*. x, y, z ... sont des *quotients complets*, et les fractions $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$ des *fractions intégrantes*.

Théorèmes relatifs à la représentation des nombres en fractions continues.

190. Les réduites obtenues en réduisant un nombre quelconque N en fraction continue, jouissent de plusieurs propriétés remarquables que nous étudierons dans ce chapitre.

Digitized by Google

THÉORÈME I. *Le nombre* N *est toujours compris entre deux réduites consécutives, ou, en d'autres termes, les réduites sont alternativement plus petites et plus grandes que* N.

Si nous reprenons, en effet, les équations [1], [2], [3], [4]...

[1] $$N = a + \frac{1}{y},$$

[2] $$N = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{z}},$$

[3] $$N = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{u}}},$$

[4] $$N = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{v}}}}.$$

etc. . . . .

b étant la partie entière de y, $\frac{1}{y}$ est moindre que $\frac{1}{b}$, et compris entre 0 et $\frac{1}{b}$. Si donc on remplace successivement, dans [1], $\frac{1}{y}$ par 0 et par $\frac{1}{b}$, les erreurs commises le seront en sens inverse, et les résultats obtenus a et $a + \frac{1}{b}$ comprendront N.

c étant la partie entière de z, $\frac{1}{z}$ est moindre que $\frac{1}{c}$, et compris entre 0 et $\frac{1}{c}$. Si donc on le remplace successivement dans [2], par 0 et par $\frac{1}{c}$, les erreurs commises le seront en sens différent, et les valeurs obtenues $a + \frac{1}{b}$ et $a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}}$ comprendront N.

d étant la partie entière de u, $\frac{1}{u}$ est compris entre 0 et $\frac{1}{d}$. Si donc on remplace successivement, dans [3], $\frac{1}{u}$ par 0 et par $\frac{1}{d}$, les erreurs commises le seront en sens différents, et les résultats obtenus $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}$, $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}$ comprendront N.

On pourrait continuer indéfiniment, et prouver ainsi que N est compris entre deux réduites consécutives quelconques.

191. Remarque I. *Chaque réduite est comprise entre les deux qui la précèdent.*

En effet, une réduite quelconque

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\ldots+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r}}}}}},$$

est elle-même une fraction continue, dont la valeur, en vertu du théorème I, est comprise entre les deux réduites que l'on obtient en s'arrêtant aux dénominateurs p et q : c'est précisément ce qu'il fallait démontrer.

192. Remarque II. En représentant les diverses réduites par des longueurs portées sur une même ligne droite, à partir du point O, la ligne suivante indique l'ordre dans lequel elles se succèdent, le chiffre placé à l'extrémité de chaque longueur étant le numéro d'ordre de la réduite correspondante ;

0 1 3 5 7 6 4 2

193. Théorème II. *Tout nombre commensurable donne naissance à une fraction continue limitée, et réciproquement, toute fraction continue limitée représente un nombre commensurable.*

Un nombre commensurable est toujours le rapport de deux

Digitized by Google

nombres entiers : désignons-le par $\frac{A}{B}$. Pour réduire $\frac{A}{B}$ en fraction continue, il faut (188) en extraire la partie entière. Soit a cette partie entière, et r le reste de la division de A par B, on aura

$$\frac{A}{B} = a + \frac{r}{B} = a + \frac{1}{\frac{B}{r}}.$$

$\frac{B}{r}$ est ici le nombre que plus haut nous désignions par y.

Il faut ensuite (188) trouver la partie entière de y, c'est-à-dire diviser B par r. Soit b le quotient et r' le reste, on aura

$$\frac{B}{r} = b + \frac{r'}{r} = b + \frac{1}{\frac{r}{r'}}.$$

$\frac{r}{r'}$ est ici le nombre que plus haut (188) nous désignions par z. En continuant ainsi, on aperçoit que le calcul qui donne les nombres entiers a, b, c ..., est précisément celui qu'il faudrait faire pour trouver le plus grand commun diviseur de A et de B : ce calcul se terminera donc, et le nombre des termes de la fraction continue est par conséquent limité.

Réciproquement, toute fraction continue limitée représente un nombre commensurable. Soit, en effet,

$$[1] \qquad N = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \dots + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r}}}}}}.$$

a, b, c ... p, q, r étant des nombres entiers, les opérations indiquées dans le second membre peuvent évidemment s'effectuer par des additions ou des divisions de fractions : elles donneront donc pour résultat une fraction à termes entiers; N est, par conséquent, commensurable.

Remarque. Pour effectuer l'opération indiquée dans le second

Digitized by Google

membre [1], on commencerait par ajouter q à $\frac{1}{r}$; puis on diviserait l'unité par cette somme. On ajouterait p au quotient; puis on diviserait l'unité par la somme, et ainsi de suite. Tel est, du moins, le procédé qui se présente le plus naturellement, et qui suffit pour la démonstration du théorème II. Mais on peut le simplifier, comme nous allons le voir en étudiant la loi de formation des réduites.

Loi de la formation des réduites.

194. Étant donnée une fraction continue

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \ldots}}},$$

on trouve sans difficulté, pour l'expression des premières réduites,

$$a = a,$$

$$a + \frac{1}{b} = \frac{ab+1}{b},$$

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}} = \frac{abc + a + c}{bc + 1},$$

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}} = \frac{abcd + cd + ad + ab + 1}{bcd + d + b},$$

et l'on reconnait que chacune de ces fractions peut se former en multipliant les deux termes de la précédente par le quotient incomplet auquel on s'arrête, et en ajoutant terme à terme la fraction ainsi obtenue avec la réduite qui précède de deux rangs.

En effet,

$$\frac{abc + c + a}{bc + 1} = \frac{(ab+1)c + a}{bc + 1},$$

$$\frac{abcd + cd + ab + 1}{bcd + d + b} = \frac{[(ab+1)c + a]d + ab + 1}{(bc+1)d + b}.$$

Digitized by Google

Pour démontrer que cette loi de formation est générale, supposons qu'elle ait été vérifiée pour les premières réduites, jusqu'à celle qui correspond à un certain quotient μ. Nous allons prouver qu'elle s'étend, par cela même, à la réduite suivante.

Soit $\frac{R}{R'}$ la réduite obtenue en s'arrêtant au quotient incomplet μ, $\frac{Q}{Q'}$ et $\frac{P}{P'}$ celles qui la précèdent, on aura, d'après la loi admise,

$$\frac{R}{R'}=\frac{Q\mu+P}{Q'\mu+P'}.$$

Mais les calculs à l'aide desquels nous avons vérifié que la loi s'applique aux premières réduites sont tout algébriques : les quotients incomplets y étaient représentés par des lettres auxquelles rien ne supposait une valeur entière; si, par conséquent, on introduit un quotient de plus μ', il suffira de remplacer, dans les résultats, μ par $\mu+\frac{1}{\mu'}$, et la réduite qui suit $\frac{R}{R'}$ sera, par conséquent,

$$\frac{S}{S'}=\frac{Q\left(\mu+\frac{1}{\mu'}\right)+P}{Q'\left(\mu+\frac{1}{\mu'}\right)+P'}=\frac{(Q\mu+P)\mu'+Q}{(Q'\mu+P')\mu'+Q'},$$

ce qui est conforme à la loi énoncée.

195. Remarque. La démonstration précédente ne suppose aucunement que μ' soit entier, on peut donc, dans le résultat obtenu, remplacer ce quotient incomplet par le quotient complet correspondant que nous désignerons par y. On obtiendra ainsi la valeur exacte du nombre même qui a été réduit en fraction continue; cette valeur est

$$N=\frac{Ry+Q}{R'y+Q'}.$$

Digitized by

Propriétés des réduites.

196. Théorème I. *La différence de deux réduites consécutives est une fraction qui a pour numérateur l'unité.*

Soient $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$, $\frac{R}{R'}$, trois réduites consécutives; d'après ce qui précède, on a

$$\frac{R}{R'} = \frac{Q\mu + P}{Q'\mu + P'};$$

or, on a identiquement

$$\frac{Q}{Q'} - \frac{P}{P'} = \frac{QP' - PQ'}{Q'P'};$$

$$\frac{R}{R'} - \frac{Q}{Q'} = \frac{Q\mu + P}{Q'\mu + P'} - \frac{Q}{Q'} = \frac{QQ'\mu + PQ' - QQ'\mu - QP'}{Q'(Q'\mu + P')}$$
$$= \frac{PQ' - QP'}{Q'(Q'\mu + P')};$$

les deux différences $\frac{Q}{Q'} - \frac{P}{P'}$, $\frac{R}{R'} - \frac{Q}{Q'}$ ont, par conséquent, même numérateur au signe près, et comme ce sont deux différences consécutives quelconques, on en conclut que le numérateur de la différence de deux réduites consécutives est constant en valeur absolue. Or, en considérant les deux premières réduites

$$a \quad \text{et} \quad \frac{ab+1}{b},$$

on voit que leur différence $\frac{1}{b}$ a pour numérateur l'unité; la valeur constante du numérateur est donc l'unité.

197. Théorème II. *Les réduites fournies par la loi de formation indiquée* (**194**) *sont des fractions irréductibles.*

Soient $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$, deux réduites consécutives. Le numérateur de leur différence $PQ' - QP'$ est, d'après ce qui précède, égal à l'unité. Or, l'équation

$$PQ' - QP' = \pm 1$$

ne permet pas qu'il existe aucun facteur commun à P et à Q,

Digitized by Google

car ce facteur diviserait les deux termes de la différence $PQ'-QP'$ et devrait, par conséquent, diviser l'unité; ce qui est impossible.

198. Théorème III. *Deux réduites consécutives comprennent toujours entre elles la valeur de la fraction continue, et la plus avancée est celle qui en approche le plus.*

La première partie de cette proposition a déjà été démontrée (**190**) lorsque nous avons fait voir que les réduites sont alternativement plus petites et plus grandes que la valeur de la fraction continue. Nous allons voir qu'elle peut aussi se déduire facilement des formules qui viennent d'être démontrées.

Soient $\frac{Q}{Q'}$, $\frac{R}{R'}$ deux réduites consécutives, et x le quotient complet qui suit celui auquel on s'est arrêté, la valeur de la fraction continue est égale (**195**) à

$$\frac{Rx+Q}{R'x+Q'};$$

or, on a évidemment

$$\frac{Rx+Q}{R'x+Q'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{RQ'x-R'Qx}{Q'(R'x+Q')}$$

$$\frac{Rx+Q}{R'x+Q'}-\frac{R}{R'}=\frac{QR'-Q'R}{(R'x+Q')R'},$$

mais on sait (**196**) que

$$RQ'-R'Q=\pm 1, \quad QR'-Q'R=\mp 1,$$

les deux résultats précédents, peuvent, par conséquent, s'écrire

$$\frac{Rx+Q}{R'x+Q'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{\pm x}{Q'(R'x+Q')}$$

$$\frac{Rx+Q}{R'x+Q'}-\frac{R}{R'}=\frac{\mp 1}{R'(R'x+Q')},$$

et à la seule inspection de ces résultats, on voit qu'ils sont de signes contraires, et que le premier est le plus grand en valeur absolue, puisque x est plus grand que l'unité et que Q' est plus petit que R'.

199. Remarque. Aucun nombre ne peut approcher, plus qu'une

Digitized by Google

réduite, de la valeur d'une fraction continue, sans être compris entre cette réduite et la réduite précédente. Soit, en effet, un nombre m qui approche plus de la valeur de la fraction continue que la réduite $\frac{R}{R'}$, *à fortiori* approchera-t-il plus que la réduite précédente $\frac{Q}{Q'}$, et comme la fraction continue est comprise entre ces deux réduites, il faudra évidemment que m le soit lui-même.

200. THÉORÈME IV. *Une réduite quelconque approche plus de la valeur de la fraction continue que toute autre fraction dont les termes seraient plus simples.*

Pour qu'une fraction $\frac{A}{B}$ approche plus de la valeur de la fraction continue que la réduite $\frac{R}{R'}$, il faut que (199) $\frac{A}{B}$ soit compris entre $\frac{R}{R'}$ et la réduite précédente $\frac{Q}{Q'}$; la différence $\frac{A}{B}-\frac{Q}{Q'}$ doit être, par conséquent, moindre en valeur absolue que $\frac{R}{R'}-\frac{Q}{Q'}$; or, on a

$$\frac{A}{B}-\frac{Q}{Q'}=\frac{AQ'-BQ}{Q'B}$$
$$\frac{R}{R'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{\pm 1}{Q'R'};$$

et la première de ces fractions ayant un numérateur au moins égal à l'unité, ne peut être moindre que la seconde que si son dénominateur est plus grand, c'est-à-dire si l'on a $B>R'$.

Pour prouver, qu'en outre, A doit être plus grand que R, remarquons que $\frac{A}{B}$ étant compris entre $\frac{R}{R'}$ et $\frac{Q}{Q'}$, $\frac{B}{A}$ doit l'être évidemment entre $\frac{R'}{R}$ et $\frac{Q'}{Q}$, et, par suite, la différence $\frac{B}{A}-\frac{Q'}{Q}$ doit être moindre, en valeur absolue, que $\frac{R'}{R}-\frac{Q'}{Q}$; or, on a

$$\frac{B}{A}-\frac{Q'}{Q}=\frac{BQ-AQ'}{AQ}$$
$$\frac{R'}{R}-\frac{Q'}{Q}=\frac{R'Q-RQ'}{RQ}=\frac{\pm 1}{RQ},$$

Digitized by Google

et la seconde expression ne peut évidemment être moindre que la première que si A est plus grand que R.

201. REMARQUE. Ce dernier théorème montre l'avantage qu'il y a à réduire les nombres en fraction continue; les réduites fourniront, en effet, une série de valeurs approchées qui seront aussi simples que possible, eu égard au degré d'approximation obtenu. L'erreur commise, en s'arrêtant à une réduite quelconque, sera toujours moindre que la différence entre cette réduite et la suivante, c'est-à-dire moindre qu'une fraction ayant pour numérateur l'unité et pour dénominateur le produit des dénominateurs des deux réduites.

EXEMPLE. *Trouver des valeurs approchées de* $\frac{5734}{6289}$ *exprimées par des fractions aussi simples que possible.*

En réduisant la fraction proposée en fraction continue, on trouve par le procédé indiqué (**193**) :

$$\frac{5734}{6289}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{61+\frac{1}{3}}}}}.$$

Les réduites successives sont :

$$1,\quad \frac{10}{11},\quad \frac{31}{34},\quad \frac{1901}{2085},\quad \frac{5734}{6289}.$$

Les valeurs approchées sont donc ces différentes fractions; il est impossible d'en trouver de plus simples qui approchent davantage; 1 et $\frac{31}{34}$, réduites de rang impair, sont trop petites, $\frac{10}{11}$ et $\frac{1901}{2085}$, réduites de rang pair, sont trop grandes. L'erreur commise en remplaçant la fraction donnée par l'une d'entre elles, est moindre que la différence avec la réduite suivante. Par exemple, en adoptant la réduite $\frac{31}{34}$, on commettra une erreur moindre que $\frac{1}{34\times 2085}$, c'est-à-dire que $\frac{1}{70890}$.

Digitized by Google

EXEMPLE II. *Trouver des valeurs approchées aussi simples que possible de la racine carrée du nombre* 10.

La partie entière de $\sqrt{10}$ étant 3, posons

$$\sqrt{10} = 3 + \frac{1}{y};$$

on tire de là $$y = \frac{1}{\sqrt{10} - 3};$$

ou, en multipliant les deux termes de cette fraction par $\sqrt{10} + 3$,

$$y = \sqrt{10} + 3;$$

y est compris entre 6 et 7; posons donc

$$y = \sqrt{10} + 3 = 6 + \frac{1}{z};$$

on tire de là $$z = \frac{1}{\sqrt{10} - 3};$$

par conséquent, z est égal à y. Les calculs se reproduisent donc indéfiniment les mêmes et dans le même ordre, et il est facile de voir que l'on aura

$$\sqrt{10} = 3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{6 + \dots}}}}}$$

On obtiendra donc pour valeurs approchées de $\sqrt{10}$ les réduites successives de cette fraction continue qui sont :

$$3, \quad \frac{19}{6}, \quad \frac{60}{19}, \quad \frac{379}{120}, \quad \frac{1197}{379}, \quad \text{etc.}$$

Chacune d'elles approche plus que toute autre fraction exprimée en termes moindres, et diffère de $\sqrt{10}$ d'une quantité moindre que l'unité divisée par le produit de son dénominateur par celui de la réduite suivante; par exemple, l'erreur com-

mise en prenant $\sqrt{10} = \frac{379}{120}$ est moindre que $\frac{1}{120 \times 379}$ ou que $\frac{1}{45480}$.

202. Lorsque l'on connait deux valeurs approchées d'un nombre, l'une en plus, l'autre en moins, si on les réduit en fraction continue, on peut être assuré que les quotients incomplets qui seront communs aux deux expressions, appartiendront aussi au nombre qui est compris entre elles. Si, en effet, un nombre x est compris entre A et A', et qu'on ait

$$A = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \cfrac{1}{f + \ldots}}}}}$$

$$A' = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \cfrac{1}{f' + \ldots}}}}}$$

Je dis qu'en réduisant x en fraction continue, on trouvera nécessairement, pour les premiers quotients incomplets, a, b, c, d, e.

En effet, A et A' ayant la même partie entière a, il en est de même de x qui est compris entre eux.

Si l'on pose

$$A = a + \frac{1}{y}, \quad A' = a + \frac{1}{y'}, \quad x = a + \frac{1}{x'},$$

x étant compris entre A et A', x' le sera nécessairement entre y et y'; or, y et y' ont l'un et l'autre b pour partie entière, il en sera donc de même de x'.

Si l'on pose

$$y = b + \frac{1}{z}, \quad y' = b + \frac{1}{z'}, \quad x' = b + \frac{1}{x''},$$

on verra de même que x'' est compris entre z et z' et que, par suite, sa partie entière est c, et en continuant ainsi l'on verra

Digitized by Google

que la fraction continue qui représente x commencera par les fractions intégrantes

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e}}}}.$$

Application. Le nombre π est compris entre 3,1415926 et 3,1415927, or en réduisant ces deux expressions en fractions continues on trouve

$$3{,}1415926=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{243+\dots}}}},$$

$$3{,}1415927=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{354}}}}.$$

Si donc on réduisait π en fraction continue, on trouverait

$$\pi=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{y}}}},$$

et les réduites 3, $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$, $\frac{355}{113}$, jouissent de la propriété d'approcher de π, plus que les fractions dont les termes sont moindres que les leurs.

Digitized by Google

RÉSUMÉ.

188. Définition des fractions continues. — **189**. Définition des quotients incomplets, des quotients complets, des fractions intégrantes et des réduites. — **190**. Le nombre qui a été réduit en fraction continue est toujours compris entre deux réduites consécutives. — **191**. Chaque réduite est comprise entre les deux qui la précèdent. — **192**. Représentation de la manière dont se succèdent les valeurs des réduites. — **193**. Tout nombre commensurable donne naissance à une fraction continue limitée, et réciproquement toute fraction limitée représente un nombre incommensurable. — **194**. Loi de formation des réduites. — **195**. Expression de la valeur de la fraction continue en substituant, dans la formule qui donne une réduite, le quotient complet au quotient incomplet correspondant. — **196**. Différence de deux réduites. — **197**. Les réduites sont des fractions irréductibles. — **198**. Deux réduites comprennent la valeur de la fraction continue, et la plus avancée est celle qui approche le plus. — **199**. Aucun nombre ne peut approcher plus qu'une réduite de la valeur d'une fraction continue sans être compris entre cette réduite et la précédente. — **200**. Une réduite approche plus de la valeur de la fraction continue que toute autre fraction à termes plus simples. — **201**. Application de la théorie des fractions continues à la recherche des valeurs approchées d'un nombre aussi simples que possible, eu égard au degré d'approximation; valeurs approchées d'une fraction, d'une racine carrée. — **202**. Valeurs approchées d'un nombre compris entre deux limites données; application au nombre π.

EXERCICES.

I. Réduire $\sqrt{a^2+1}$ en fraction continue.

II. Réduire en fractions continues les expressions

$$a+\cfrac{1}{b-\cfrac{1}{c}}, \qquad a+\cfrac{1}{b-\cfrac{1}{c-\cfrac{1}{d}}}.$$

III. Toute fraction continue périodique représente la racine d'une équation de second degré à coefficients entiers.

IV. A et B étant deux nombres incommensurables, assigner

une limite α telle qu'on puisse, en diminuant A d'une quantité α' moindre que α, faire acquérir à $A-\alpha$ et à B un plus grand commun diviseur au moins égal à ε.

IV. Vérifier que

$$a+b=a-b+\cfrac{4ab}{2(a-b)+\cfrac{4ab}{2(a-b)+\cfrac{4ab}{2(a-b)+\dots}}}$$

V. Trouver l'expression du second membre supposé terminé à la n^{me} fraction.

VI. Si l'une des racines d'une équation du second degré est représentée par une fraction continue dont la période commence à la première fraction intégrante

$$x=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}+\text{etc.},}}}}}$$

l'autre racine pourra s'obtenir en divisant -1 par cette même fraction continue écrite dans un ordre inverse.

Digitized by Google

CHAPITRE XIX.

ANALYSE INDÉTERMINÉE DU PREMIER DEGRÉ.

---

203. L'*analyse indéterminée* est une partie importante de la *Théorie des Nombres*. Elle a pour but de résoudre le problème général dont voici l'énoncé :

Étant données m *équations entre* m+n *inconnues* x, y, z...; *dont les coefficients sont des nombres entiers positifs ou négatifs, trouver leurs solutions entières, c'est-à-dire les systèmes de valeurs entières positives ou négatives, qui, substituées aux inconnues* x, y, z ..., *vérifient toutes les équations.*

Nous ne considérerons que le cas où toutes les équations sont du premier degré, et nous supposerons d'abord qu'il s'agit d'une seule équation à deux inconnues.

Condition pour que l'équation $ax+by=K$ admette des solutions entières.

204. Si les nombres entiers a, b et K ont un facteur commun, on peut le supprimer sans altérer l'équation

$$ax+by=K.$$

Nous supposerons donc que les trois nombres a, b, K soient premiers entre eux.

205. Théorème I. *Si* a *et* b *ont un diviseur commun* ρ *autre que l'unité, l'équation* $ax+by=K$ *n'admet aucune solution entière.*

En effet, quelles que soient les valeurs entières que l'on substitue à x et à y, le nombre $ax+by$ sera divisible par ρ; il ne peut donc être égal à K, qui, par hypothèse, ne l'est pas.

206. Théorème II. *Si* a *et* b *sont premiers entre eux, l'équation* $ax+by=K$ *admet une solution entière.*

On peut toujours supposer que le coefficient de l'une des inconnues, x par exemple, soit positif : car s'il ne l'est pas, il le deviendra en changeant les signes de tous les termes de l'équation. Cela posé, en résolvant l'équation par rapport à x, il vient

$$x = \frac{K - by}{a},$$

et je dis que si l'on donne successivement à y les a valeurs

$$0, 1, 2, \ldots, a-1,$$

il y aura une des valeurs correspondantes de x qui sera entière, et il n'y en aura qu'une seule.

En effet, divisons par a, les a valeurs de $K - by$, en faisant les divisions de manière que tous les restes soient positifs : il est aisé de voir que ces restes sont tous différents. Soient, en effet, y' et y'' deux des nombres $0, 1, 2, \ldots, a-1$, et supposons, s'il est possible, que les restes des divisions de $K - by'$ et de $K - by''$ par a soient égaux ; que l'on ait, par exemple,

$$K - by' = aq + r, \quad K - by'' = aq' + r,$$

on aura, en retranchant,

$$b(y' - y'') = a(q' - q),$$

ce qui montre que $b(y' - y'')$ est divisible par a; or cela est impossible : car a est premier avec b, et il ne peut diviser $y' - y''$, qui est moindre que lui. Les a restes que l'on obtient en divisant par a les a valeurs de $K - by$ sont donc différents ; ils sont, d'ailleurs, moindres que a ; donc l'un d'entre eux est nul. Soit β la valeur de y qui correspond au reste 0; on aura

$$x = \frac{K - b\beta}{a} = \text{un nombre entier } \alpha;$$

et par conséquent l'équation proposée admet la solution

$$x = \alpha, \quad y = \beta.$$

207. Théorème III. *Lorsque l'équation* $ax + by = K$ *admet une solution entière, elle en admet une infinité.*

Digitized by Google

Soit $x = \alpha$, $y = \beta$ une solution entière de l'équation

[1] $$ax + by = K,$$

on a l'identité $$a\alpha + b\beta = K,$$

et, par conséquent, l'équation peut s'écrire ainsi

$$ax + by = a\alpha + b\beta,$$

ou $$a(x - \alpha) = -b(y - \beta),$$

ou

[2] $$x - \alpha = \frac{-b(y - \beta)}{a}.$$

Pour qu'une valeur déterminée de y puisse, avec une certaine valeur de x, constituer une solution entière de cette équation, il faut et il suffit que la valeur de y soit telle, que $\frac{-b(y-\beta)}{a}$ soit un nombre entier, ou que $y - \beta$ soit divisible par a : car a et b sont premiers entre eux par hypothèse. En désignant donc par θ un nombre entier, on aura

[3] $$y - \beta = a\theta,$$

et l'équation [2] donne alors

[4] $$x - \alpha = -b\theta,$$

et, quelle que soit la valeur entière positive, nulle ou négative, que l'on prenne pour θ, les valeurs de x et de y, tirées des équations [3] et [4], savoir :

[5] $$y = \beta + a\theta, \quad x = \alpha - b\theta,$$

satisferont à l'équation [1].

208. Remarque. Si l'on compare les diverses solutions de l'équation proposée, on voit que les valeurs de x et celles de y forment deux progressions arithmétiques illimitées dans les deux sens, et qui ont pour raisons les coefficients de y et de x dans l'équation, l'un d'eux étant toutefois changé de signe. Les valeurs de y sont

$$\ldots \beta - 2a, \ \beta - a, \ \beta, \ \beta + a, \ \beta + 2a, \ldots$$

et celles de x

$$\ldots \alpha + 2b, \ \alpha + b, \ \alpha, \ \alpha - b, \ \alpha - 2b, \ldots$$

Digitized by Google

Procédés pour trouver les solutions entières de l'équation $ax + by = K$.

209. Il résulte du théorème III qu'il suffit de connaître une solution (α, β) de l'équation $ax + by = K$: car on aura toutes les autres par les formules :

$$x = \alpha - b\theta, \quad y = \beta + a\theta.$$

Nous allons indiquer divers procédés par lesquels on peut obtenir une première solution :

Ier Procédé. Lorsque le coefficient de l'une des inconnues x et y est un nombre peu considérable, on peut employer, pour avoir une solution de la proposée, le procédé qui a servi (théorème II) à prouver l'existence de cette solution. Soit, par exemple, l'équation

$$7x - 13y = 152.$$

En la résolvant par rapport à x, qui a le plus petit coefficient, on a

$$x = \frac{152 + 13y}{7},$$

et l'on est assuré que si l'on donne à y les 7 valeurs

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,$$

l'une des valeurs correspondantes de x sera entière. On n'a ainsi que sept essais au plus à faire. On trouve pour $y = 5$:

$$x = \frac{152 + 65}{7} = \frac{217}{7} = 31;$$

l'équation admet donc la solution $x = 31$, $y = 5$, et toutes les solutions entières sont données par les formules

$$x = 31 + 13\theta, \quad y = 5 + 7\theta,$$

où θ désigne un entier indéterminé, positif, nul ou négatif.

Le procédé qui vient d'être indiqué est impraticable si les coefficients de l'équation proposée sont de grands nombres, on doit alors recourir à l'un des suivants :

210. IIe Procédé. On a immédiatement une solution de

l'équation $ax+by=K$, si l'un des coefficients, b par exemple, est égal à 1 ; on peut prendre, en effet, $x=0$ et $y=K$. C'est à ce cas particulier que nous allons ramener, comme on va voir, le cas général.

Pour fixer les idées, nous supposerons que le coefficient de x soit le plus petit des deux en valeur absolue, nous représenterons encore l'équation par

$$[1] \qquad ax+by=K.$$

On tire de là

$$[2] \qquad x=\frac{K-by}{a};$$

effectuons la division de K et b par a en prenant les quotients par défaut ou par excès, de manière à avoir des restes positifs ou négatifs, mais plus petits en valeur absolue que $\frac{1}{2}a$; soit, par exemple,

$$K=aQ\pm K', \quad b=aq\pm b';$$

l'équation [2] devient

$$[3] \qquad x=Q-qy+\frac{\pm K'\pm b'y}{a},$$

et l'on voit que, pour avoir une solution de l'équation [3], il suffit d'en avoir une de l'équation

$$\frac{\pm K'\pm b'y}{a}=t,$$

ou

$$[4] \qquad at\mp b'y=\pm K',$$

dans laquelle t désigne une nouvelle inconnue entière. Si l'on satisfait à l'équation [4] en posant $y=\beta$, $t=\gamma$, on aura une solution de la proposée, en prenant

$$x=Q-q\beta+\gamma$$
$$y=\beta.$$

Les coefficients de l'équation [4] sont : 1° le plus petit coefficient de l'équation [1]; 2° le reste de la division du plus grand par le plus petit; on voit, d'après cela, que si l'on opère sur

Digitized by Google

l'équation [4], comme nous avons fait sur la proposée, et que l'on continue d'appliquer le même procédé, on formera une série d'équations telles que si l'on connait une solution entière de l'une quelconque d'entre elles, on pourra en déduire une solution entière de chacune des précédentes. En outre, les coefficients de ces diverses équations sont égaux en valeur absolue à deux restes consécutifs, parmi ceux qu'on obtient en cherchant le plus grand commun diviseur des nombres a et b; et comme a et b sont premiers entre eux, l'un des restes sera l'unité; par conséquent, la dernière des équations auxiliaires que nous considérons aura la forme

$$fu + v = h,$$

et admet la solution entière $u=0$, $v=h$, d'où l'on déduira une solution entière de la proposée.

Nous allons appliquer cette méthode à un exemple. Soit proposé de trouver les solutions entières de l'équation

[1] $$72x - 113y = 1000,$$

on tire $$x = \frac{1000 + 113y}{72} = 14 + 2y - \frac{8 + 31y}{72},$$

ou

[2] $$x = 14 + 2y - t,$$

en posant $$\frac{8 + 31y}{72} = t,$$

ou

[3] $$31y - 72t = -8;$$

de cette équation [3], on tire

$$y = \frac{72t - 8}{31};$$

ici on peut simplifier la méthode générale*, car 72 et 8 ayant le diviseur commun 8 qui est premier avec 31, en écrivant

$$y = 8\,\frac{9t - 1}{31},$$

* Cette modification devra être employée toutes les fois que dans l'équation proposée ou dans l'une des équations auxiliaires l'un des coefficients aura un facteur commun avec le terme indépendant des inconnues.

Digitized by Google

on voit que $9t-1$ doit être divisible par 31, on a donc

[4] $$y=8t',$$

en posant $$\frac{9t-1}{31}=t',$$

ou

[5] $$9t-31t'=1;$$

de cette équation [5], on tire

$$t=\frac{31t'+1}{9}=3t'+\frac{4t'+1}{9},$$

ou

[6] $$t=3t'+t'',$$

en posant $$\frac{4t'+1}{9}=t'',$$

ou

[7] $$4t'-9t''=-1;$$

de cette équation [7], on tire

$$t'=\frac{9t''-1}{4}=2t''+\frac{t''-1}{4},$$

ou

[8] $$t'=2t''+t''',$$

en posant $$t'''=\frac{t''-1}{4},$$

ou

[9] $$t''-4t'''=1.$$

Nous voici arrivés à une équation dans laquelle l'une des inconnues t'' a le coefficient 1, on y satisfait en posant

$$t''=1 \quad \text{et} \quad t'''=0;$$

alors les équations [8], [6], [4] et [2] donnent successivement

$$t'=2, \quad t=7, \quad y=16, \quad x=39;$$

et les solutions de la proposée sont données par les formules

$$x=39+113\theta,$$
$$y=16+72\theta,$$

où θ est un nombre entier arbitraire.

Digitized by Google

211. IIIᵉ PROCÉDÉ. L'équation proposée étant mise sous la forme

$$a(\pm x) - b(\pm y) = K,$$

où a et b sont positifs, réduisons la fraction irréductible $\frac{a}{b}$ en fraction continue, et soit $\frac{a_0}{b_0}$ l'avant-dernière réduite, c'est-à-dire celle qui précède $\frac{a}{b}$, on aura (nº **196**)

$$ab_0 - ba_0 = \pm 1,$$

et, par conséquent,

$$a(Kb_0) - b(Ka_0) = K,$$

d'où il suit que l'on satisfera à l'équation proposée en prenant

$$\pm x = Kb_0, \quad \pm y = Ka_0.$$

EXEMPLE. Trouver les solutions entières de l'équation

$$256x + 117y = 113.$$

En réduisant $\frac{256}{117}$ en fraction continue, on trouve les quotients

$$2, \quad 5, \quad 3, \quad 7,$$

et les réduites sont

$$\frac{2}{1}, \quad \frac{11}{5}, \quad \frac{35}{16}, \quad \frac{256}{117};$$

on a
$$256.16 - 117.35 = 1,$$

et, en multipliant par 113,

$$256.1808 + 117(-3955) = 113;$$

on a donc cette solution de l'équation proposée

$$x = 1808, \quad y = -3955.$$

212. REMARQUE. La solution à laquelle conduit le procédé qui vient d'être indiqué, n'est pas, en général, ce qu'on pourrait appeler la solution *minima*, c'est-à-dire celle où la valeur de l'une des inconnues est inférieure au coefficient de l'autre inconnue

Digitized by Google

dans l'équation, solution à laquelle conduit toujours le premier procédé, et aussi le deuxième, s'il est bien dirigé. Les valeurs de x et de y données par le troisième procédé sont divisibles par le second membre de l'équation proposée; mais on peut en déduire facilement la solution minima.

Ainsi, dans l'exemple précédent, les solutions sont données par les formules

$$x = 1808 - 117\theta,$$
$$y = -3955 + 256\theta.$$

Si l'on veut avoir la solution dans laquelle x est inférieur au coefficient 117 de y, il suffira de prendre pour θ le quotient de la division de 1808 par 117, qui est 15, et l'on trouve

$$x = 53,\quad y = -115.$$

On peut donc prendre les formules

$$x = 53 - 117\theta,$$
$$y = -115 + 256\theta$$

pour représenter toutes les solutions.

Résolution de l'équation $ax+by=K$ en nombres entiers et positifs.

213. On a vu que si a et b sont premiers entre eux, l'équation $ax + by = K$ a une infinité de solutions entières. Nous allons considérer en particulier le cas où l'on n'admet que les solutions entières et positives. En mettant en évidence les signes des coefficients, et se rappelant qu'on peut toujours supposer positif le coefficient de l'une des inconnues, l'équation ne peut avoir que les quatre formes suivantes :

$$ax + by = K,$$
$$ax - by = K,$$
$$ax + by = -K,$$
$$ax - by = -K.$$

La troisième de ces équations n'admet évidemment aucune solution positive, et la quatrième est comprise dans la seconde : car elle s'y ramène en changeant, l'une dans l'autre, a et b,

ainsi que x et y. Nous n'avons donc à examiner que les deux équations

$$[1] \qquad ax + by = \mathrm{K},$$
$$[2] \qquad ax - by = \mathrm{K}.$$

Considérons d'abord l'équation [2], et soit (α, β) une quelconque de ses solutions en nombres entiers positifs ou négatifs. Toutes les autres sont données par les formules :

$$x = \alpha + b\theta, \quad y = \beta + a\theta,$$

et l'on voit que, pour avoir les solutions entières et positives, il suffit de donner à θ toutes les valeurs entières qui satisfont aux inégalités

$$\alpha + b\theta > 0, \quad \beta + a\theta > 0.$$

En d'autres termes, il suffit de donner à θ des valeurs supérieures au plus grand des deux nombres $\frac{-\alpha}{b}$ et $\frac{-\beta}{a}$; par conséquent, l'équation [2] admet une infinité de solutions entières et positives.

Considérons maintenant l'équation [1]; et soit (α, β) une quelconque de ses solutions, toutes les autres seront données par les formules :

$$x = \alpha - b\theta, \quad y = \beta + a\theta.$$

Pour que x et y soient positifs, il faut et il suffit que l'on ait

$$\theta < \frac{\alpha}{b}, \quad \theta > \frac{-\beta}{a},$$

ou, à cause de l'identité $a\alpha + b\beta = \mathrm{K}$, qui donne $\frac{\alpha}{b} = -\frac{\beta}{a} + \frac{\mathrm{K}}{ab}$,

$$\theta < \frac{-\beta}{a} + \frac{\mathrm{K}}{ab}, \quad \theta > \frac{-\beta}{a}.$$

Il résulte de là que, pour avoir les solutions entières et positives de la proposée, il faut prendre pour θ les valeurs entières comprises entre $\frac{-\beta}{a}$ et $\frac{-\beta}{a} + \frac{\mathrm{K}}{ab}$.

Si entre ces limites il n'y a aucun nombre entier compris, la proposée n'admet aucune solution entière et positive. On voit

aisément que, généralement, le nombre des solutions entières et positives est égal au plus grand nombre entier contenu dans $\frac{K}{ab}$, ou à ce nombre augmenté d'une unité.

Application de la théorie précédente.

214. *Trouver les valeurs entières qu'il faut donner à* x *pour que les fractions*

$$\frac{ax+b}{c}, \quad \frac{a'x+b'}{c'}, \quad \frac{a''x+b''}{c''}, \text{ etc.},$$

où a, b, c, a', *etc.... désignent des entiers positifs ou négatifs, se réduisent à des nombres entiers.*

Ne considérons d'abord que la première fraction. En la désignant par y, il s'agit de satisfaire en nombres entiers à l'équation

$$\frac{ax+b}{c}=y,$$

ou

$$ax=cy-b.$$

Cette équation admettra des solutions si a et c sont premiers entre eux. En désignant par x_0, y_0 une première solution, et par x' un entier indéterminé, les autres solutions sont données par les formules :

$$x=x_0+cx', \quad y=y_0+ax'.$$

Il résulte de là que la première des fractions proposées sera entière pour $x=x_0+cx'$. En substituant cette valeur de x dans les autres fractions, elles deviennent

$$\frac{a'cx'+(a'x_0+b')}{c'}, \quad \frac{a''cx'+(a''x_0+b'')}{c''} \cdots,$$

et il s'agit de déterminer les valeurs entières de x', qui rendent ces fractions égales à des entiers.

C'est le même problème que le proposé; seulement, le nombre des fractions considérées est moindre d'une unité. En continuant d'appliquer le même procédé, on finira par n'avoir plus qu'une seule fraction à considérer, et alors on procédera comme nous l'avons dit en commençant.

EXEMPLE. *Trouver un nombre tel, qu'en le divisant par* 5, 7, 11, *on ait respectivement pour restes* 3, 5, 8.

Si x désigne un nombre satisfaisant à la question, les fractions

$$[1] \qquad \frac{x-3}{5}, \quad \frac{x-5}{7}, \quad \frac{x-8}{11}$$

seront des nombres entiers. Pour que la première fraction soit entière, il faut que

$$\frac{x-3}{5} = x', \quad x = 5x' + 3,$$

x' étant un entier. Les deux autres deviennent alors

$$[2] \qquad \frac{5x'-2}{7}, \quad \frac{5x'-5}{11}.$$

Pour que $\frac{5x'-5}{11} = \frac{5(x'-1)}{11}$ soit un nombre entier, il faut que 11 divise $x'-1$; car il est premier avec 5; on peut donc poser

$$x'-1 = 11x'' \quad \text{ou} \quad x' = 11x'' + 1.$$

Alors la première des fractions [2] devient

$$\frac{55x''+3}{7} = 8x'' - \frac{x''-3}{7},$$

et la condition, pour que cette fraction soit entière, est que $x''-3$ soit divisible par 7. On peut donc écrire, en désignant par θ un entier indéterminé,

$$x'' = 7\theta + 3.$$

Alors les valeurs de x' et de x deviennent

$$x' = 77\theta + 34,$$
$$x = 385\theta + 173.$$

Cette dernière formule résout le problème. Le plus petit nombre satisfaisant à la question est 173.

Digitized by Google

Résolution en nombres entiers d'une équation à un nombre quelconque d'inconnues.

215. Considérons d'abord une équation à trois inconnues x, y, z

$$ax + by + cz = \mathrm{K},$$

dont les coefficients a, b, c, K sont des nombres entiers premiers entre eux, positifs ou négatifs.

La condition, pour que la proposée admette des solutions entières, est que a, b, c soient premiers entre eux : car si a, b, c ont un facteur commun ρ, le premier membre est divisible par ρ, tandis que le second ne l'est pas ; d'où il suit que l'équation est impossible. On va voir que cette condition est suffisante. Si parmi les nombres a, b, c, il y en a deux, a et b par exemple, qui soient premiers entre eux, en donnant à z une valeur entière quelconque γ, on pourra toujours trouver (**206**) des valeurs entières de x et de y, telles que

$$ax + by = \mathrm{K} - c\gamma;$$

par conséquent, la proposée a une infinité de solutions entières pour chaque valeur arbitraire attribuée à z.

Si deux quelconques des nombres a, b, c ont un facteur commun, soit ρ le plus grand commun diviseur de a et de b, et posons $a = \rho a'$, $b = \rho b'$, la proposée devient

$$a'x + b'y = \frac{\mathrm{K} - cz}{\rho}.$$

ρ et c étant premiers entre eux, on pourra trouver (**214**) une infinité de valeurs de z telles que $\dfrac{\mathrm{K} - cz}{\rho}$ se réduise à un entier K′; la proposée se réduit alors à

$$a'x + b'y = \mathrm{K}',$$

et l'on voit qu'on pourra trouver une infinité de solutions entières.

Ce qui précède permet de trouver une première solution de la proposée.

EXEMPLE. *Trouver une solution entière de l'équation*

$$4x - 18y + 27z = 100.$$

Digitized by Google

L'équation peut s'écrire ainsi

$$2x - 9y = \frac{100 - 27z}{2},$$

le second membre se réduit à 23 pour $z = 2$, et l'on a

$$2x - 9y = 23,$$

qui admet la solution entière $y = 1$, $x = 16$. La proposée a donc la solution $x = 16$, $y = 1$, $z = 2$.

216. Nous allons faire voir maintenant comment, à l'aide d'une seule solution, on peut déterminer toutes les autres.

Soient $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$ une solution entière de l'équation

$$[1] \qquad ax + by + cz = \mathrm{K},$$

en sorte qu'on a identiquement

$$[2] \qquad a\alpha + b\beta + c\gamma = \mathrm{K}.$$

Soit θ un nombre entier indéterminé, il est évident qu'on satisfera à la proposée en posant

$$[3] \qquad \begin{cases} x = \alpha + b\theta, \\ y = \beta - a\theta, \\ z = \gamma, \end{cases}$$

car en portant ces valeurs de x, y et z dans la proposée, les termes en θ disparaissent et le résultat de la substitution est l'identité [2]. Ainsi de la solution (α, β, γ), nous déduisons par ce procédé la solution beaucoup plus générale [3]. Néanmoins les formules [3] ne donnent pas toutes les solutions de la proposée, car on a vu qu'il y a une infinité de valeurs de z qui peuvent faire partie d'un système de solutions.

Mais du système [3] on peut en déduire un plus général en ajoutant aux valeurs de x et de z les deux termes $c\varphi$ et $-a\varphi$ où φ désigne un entier indéterminé, et il vient alors

$$[4] \qquad \begin{cases} x = \alpha + b\theta + c\varphi, \\ y = \beta - a\theta, \\ z = \gamma - a\varphi; \end{cases}$$

ces formules [4] donnent bien toutes les solutions de la proposée, si l'on attribue à θ et à φ des valeurs fractionnaires,

mais si l'on ne veut attribuer à ces indéterminées que des valeurs entières, les formules [4] ne donneront qu'une partie des solutions.

Du système [4] on en déduit un plus général en ajoutant aux valeurs de y et de z les deux termes $c\psi$ et $-b\psi$, où ψ désigne un entier indéterminé. Il vient ainsi

$$[5] \quad \begin{cases} x=\alpha+b\theta+c\varphi, \\ y=\beta-a\theta+c\psi, \\ z=\gamma-a\varphi-b\psi, \end{cases}$$

et je dis que ces formules [5] donneront toutes les solutions entières de la proposée, si l'on attribue aux indéterminées θ, φ, ψ, toutes les valeurs entières positives ou négatives.

Pour le démontrer, supposons que la proposée admette la solution $(\alpha', \beta', \gamma')$, je dis qu'on peut trouver des valeurs entières de θ, φ, ψ, telles que l'on ait

$$\alpha'=\alpha+b\theta+c\varphi,$$
$$\beta'=\beta-a\theta+c\psi,$$
$$\gamma'=\gamma-a\varphi-b\psi,$$

ou

$$[6] \quad \begin{cases} b\theta+c\varphi=\alpha'-\alpha, \\ -a\theta+c\psi=\beta'-\beta, \\ -a\varphi-b\psi=\gamma'-\gamma. \end{cases}$$

D'abord l'une de ces équations est une conséquence des deux autres; en effet, en les ajoutant après les avoir multipliées respectivement par a, b, c, il vient

$$[7] \quad 0=a(\alpha'-\alpha)+b(\beta'-\beta)+c(\gamma'-\gamma),$$

ce qui est une identité, à cause de

$$a\alpha+b\beta+c\gamma=\mathrm{K},$$
$$a\alpha'+b\beta'+c\gamma'=\mathrm{K};$$

nous ne considérons donc que les deux premières équations [6], savoir

$$[8] \quad \begin{cases} b\theta+c\varphi=\alpha'-\alpha, \\ -a\theta+c\psi=\beta'-\beta. \end{cases}$$

Chacune de ces équations [8], considérée individuellement, admet des solutions entières; car, à cause de l'identité [7], le

Digitized by Google

plus grand commun diviseur de b et c divise $\alpha'-\alpha$, et de même le plus grand commun diviseur de a et c divise $6'-6$, parce que a, b, c sont premiers entre eux.

Soient $(\theta_0\varphi_0)$ une solution de la première équation [8], et ρ le plus grand commun diviseur de b et c; soient aussi $(\theta_1\psi_1)$ une solution de la seconde équation [8], et ρ' le plus grand commun diviseur de a et c; les solutions des deux équations [8], considérées isolément, seront respectivement données par les formules

$$[9] \qquad \left\{\begin{aligned} \theta &= \theta_0 + \frac{c}{\rho}t, \\ \varphi &= \varphi_0 - \frac{b}{\rho}t; \end{aligned}\right.$$

$$[10] \qquad \left\{\begin{aligned} \theta &= \theta_1 + \frac{c}{\rho'}t', \\ \psi &= \psi_1 + \frac{a}{\rho'}t'; \end{aligned}\right.$$

en désignant par t et t' deux entiers indéterminés. Pour établir que le système des équations [8] admet des solutions entières, il suffit donc de prouver qu'on peut trouver des valeurs entières de t et t', telles que les valeurs de θ des équations [9] et [10] soient égales, c'est-à-dire telles que l'on ait

$$\theta_0 + \frac{c}{\rho}t = \theta_1 + \frac{c}{\rho'}t',$$

ou

$$[11] \qquad \frac{c}{\rho'}t' - \frac{c}{\rho}t = \theta_0 - \theta_1.$$

Or, on a, par hypothèse,

$$b\theta_0 + c\varphi_0 = \alpha' - \alpha,$$

$$-a\theta_1 + c\psi_1 = 6' - 6;$$

ajoutons ces équations après les avoir multipliées respectivement par a et b, il vient

$$ab(\theta_0 - \theta_1) + c(a\varphi_0 + b\psi_1) = a(\alpha' - \alpha) + b(\beta' - \beta),$$

Digitized by Google

ou, à cause de l'identité [7],

$$ab(\theta_0-\theta_1)+c(a\varphi_0+b\psi_1)=-c(\gamma'-\gamma),$$

ou $$\frac{a}{\rho'}\frac{b}{\rho}(\theta_0-\theta_1)+\frac{c}{\rho\rho'}(a\varphi_0+b\psi_1+\gamma'-\gamma)=0:$$

d'après cette équation $\frac{c}{\rho\rho'}$, qui est un nombre entier premier avec $\frac{a}{\rho'}$ et $\frac{b}{\rho}$, doit diviser $\theta_0-\theta_1$, on a donc

$$\theta_0-\theta_1=\frac{ic}{\rho\rho'},$$

i étant un nombre entier.

Alors l'équation [11] devient

$$\frac{c}{\rho'}t'-\frac{c}{\rho}t=\frac{ic}{\rho\rho'},$$

ou $$\rho t'-\rho' t=i,$$

et l'on voit qu'elle admet des solutions entières, car ρ et ρ' sont premiers entre eux.

217. En général, si l'on a une équation à μ inconnues,

$$ax+by+cz+\ldots+du=\mathrm{K},$$

où a, b,... d, k sont premiers entre eux, il n'y aura de solutions entières que si a, b, c... d sont eux-mêmes premiers entre eux. Proposons-nous, dans ce cas, de trouver une première solution. Soit ρ le plus grand commun diviseur de a et b, on aura

$$\frac{a}{\rho}x+\frac{b}{\rho}y=\frac{\mathrm{K}-cz-\ldots-du}{\rho},$$

on cherche une solution entière de l'équation

$$\frac{\mathrm{K}-cz-\ldots-du}{\rho}=\xi,$$

qui n'a que $\mu-1$ inconnues, et en prenant ensuite une solution de $\frac{a}{\rho}x+\frac{b}{\rho}y=\xi$, on aura une solution de la proposée.

Résolution en nombres entiers d'un système de m équations à $m+1$ inconnues.

218. Considérons d'abord le cas de deux équations à trois inconnues

$$[1] \qquad ax + by + cz = K,$$

$$[2] \qquad a'x + b'y + c'z = K';$$

où a, b, c, k sont des entiers premiers entre eux, ainsi que a', b', c', k'.

Il faut, pour que le problème soit possible, que chaque équation considérée isolément admette des solutions entières, et par conséquent que a, b, c soient premiers entre eux, ainsi que a', b', c'.

En éliminant l'une des inconnues, z par exemple, on a

$$[3] \qquad (ac' - ca')x + (bc' - cb')y = Kc' - cK',$$

Et l'on peut substituer au système des équations [1] et [2], celui des équations [1] et [3]; si l'équation [3] admet des solutions entières, ces solutions auront la forme

$$[4] \qquad \begin{cases} x = x_0 + \dfrac{bc' - cb'}{\rho}\theta, \\ y = y_0 + \dfrac{ac' - ca'}{\rho}\theta; \end{cases}$$

en désignant par θ un entier indéterminé, par ρ le plus grand commun diviseur entre $ac'-ca'$, $bc'-cb'$, et $Kc'-cK'$, et enfin par $(x_0 y_0)$ une première solution de l'équation [3]. En substituant les valeurs [4] de x et y dans l'équation [1], on aura une équation à deux inconnues z et θ; si elle admet des solutions entières, z et θ seront exprimées à l'aide d'une nouvelle indéterminée θ', par suite on aura toutes les solutions des proposées exprimées par une seule indéterminée θ'.

Remarque. Si c et c' sont premiers entre eux, la seule condition de possibilité du problème est que l'équation [3] admette des solutions entières.

En effet, l'équation [3] peut se mettre sous la forme

$$\frac{ax + by - K}{a'x + b'y - K'} = \frac{c}{c'};$$

par hypothèse, elle admet des solutions entières, et $\frac{c}{c'}$ est irréductible; si donc $x_0 y_0$ désigne une solution, on a, par un théorème d'arithmétique, et en désignant par z_0 un nombre entier,

$$ax_0 + by_0 - K = cz_0,$$
$$a'x_0 + b'y_0 - K' = c'z_0,$$

par conséquent, les équations [1] admettent la solution entière $x_0 y_0 z_0$.

219. Si l'on ne veut avoir que les solutions positives des proposées, les trois inconnues x, y, z étant exprimées par un entier θ indéterminé, on ne devra prendre pour θ que les valeurs entières qui satisfont aux inégalités

$$x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0.$$

220. Exemple. 30 *personnes ont dépensé* 30 *francs, en commun, la dépense d'un homme est de* 5 *francs, celle d'une femme* 1 *franc et celle d'un enfant* $\frac{1}{4}$ *franc; on demande combien il y avait d'hommes, de femmes et d'enfants.*

En appelant x le nombre des hommes, y celui des femmes, et z celui des enfants, les équations du problème sont

$$[1] \qquad \begin{cases} x + y + z = 30, \\ 5x + y + \frac{1}{4}z = 30, \end{cases}$$

en retranchant on a

$$[2] \qquad 4x - \tfrac{3}{4}z = 0,$$

ou

$$\frac{x}{z} = \frac{3}{16};$$

la fraction $\frac{3}{16}$ étant irréductible, on a, en désignant par θ un entier,

$$x = 3\theta,$$
$$z = 16\theta;$$

ces formules donnent les solutions de l'équation [2]; la première des équations [1] donne alors

$$19\theta + y = 30,$$

et l'on déduit

$$y = 30 - 19\theta.$$

Pour que les valeurs de x, y, z soient positives, il faut que

$$\theta > 0 \quad \text{et} \quad \theta < \frac{30}{19};$$

par conséquent, θ ne peut avoir que la valeur 1; on a

$$x = 3, \quad y = 11, \quad z = 16.$$

Ainsi il y avait 3 hommes, 11 femmes et 16 enfants.

221. Considérons maintenant un système de m équations entre $m+1$ inconnues; on substituera au système proposé un système équivalent de m équations dont la première $A_1 = 0$ ne contienne que deux inconnues x, y, la seconde $A_2 = 0$, que ces deux mêmes inconnues avec une troisième z, et ainsi de suite.

Si l'équation $A_1 = 0$ a des solutions entières, on exprimera x et y en fonction d'une indéterminée θ, et en substituant leurs valeurs dans $A_2 = 0$, cette équation ne contiendra que deux inconnues z et θ; si elle a des solutions entières, on exprimera z et θ en fonction d'une nouvelle indéterminée θ'; alors x, y, z seront exprimées par θ', en portant leurs valeurs dans la troisième équation $A_3 = 0$, celle-ci ne contiendra plus que deux inconnues, et on continuera de la sorte jusqu'à ce qu'on ait exprimé toutes les inconnues en fonction d'une seule et même indéterminée, si cela est possible.

Nous ne pouvons considérer ici le cas général de $m+n$ inconnues entre m équations.

Analyse indéterminée du second degré.

222. L'équation générale du second degré à deux inconnues, a la forme

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

mais nous n'examinerons que le cas où le coefficient de l'un des carrés x^2 ou y^2 est nul. Supposons $c = 0$, en résolvant l'équation par rapport à y, il vient

$$(bx + e)y = -ax^2 - dx - f,$$

ou

$$y = \frac{-ax^2 - dx - f}{bx + e};$$

Digitized by Google

par hypothèse, a, b, d, e, f sont des entiers premiers entre eux. En effectuant la division autant que possible, on a

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{ae - bd}{b^2} - \frac{(ae + b^2)f + bde}{b^2(bx + e)},$$

ou
$$b^2y = -abx + ae - bd - \frac{(ae + b^2)f + bde}{bx + e}.$$

On voit que x doit être tel que $bx + e$ divise $(ae + b^2)f + bde$; soit donc Δ un diviseur de ce nombre, on fera $bx + e = \pm\Delta$, d'où $x = \frac{-e \pm \Delta}{b}$, si cette valeur de x est entière, et si la valeur correspondante de y l'est aussi, on aura une solution de la proposée. On voit que les solutions entières sont toujours en nombre limité.

223. La méthode précédente est en défaut si $b = 0$. Dans ce cas, la proposée a la forme

$$y = -\frac{ax^2 + dx + f}{e}.$$

Supposons que cette équation admette une solution $y = y_0$, $x = x_0$, et posons $x = x_0 + e\theta$, on aura

$$y = -\frac{ax_0^2 + dx_0 + f}{e} - (2ax_0 + d)\theta + a^2e\theta^2;$$

or, par hypothèse, $\frac{ax_0^2 + dx_0 + f}{e}$ est entier, donc la valeur $x_0 + e\theta$ de x donnera une nouvelle valeur entière de y; d'ailleurs on peut déterminer θ de manière que $x_0 + e\theta$ soit compris entre $-\frac{1}{2}e$ et $+\frac{1}{2}e$; si donc la proposée admet des solutions entières, il y a une valeur de x comprise entre $-\frac{1}{2}e$ et $+\frac{1}{2}e$ qui rend y entier, on pourra la trouver par des essais dont le nombre ne dépassera pas e, et on aura ensuite toutes les valeurs de x qui rendent y entier par la formule

$$x = x_0 + e\theta,$$

où θ est un entier indéterminé. La proposée admet donc un nombre infini de solutions ou n'en admet aucune.

224. Problème. *Déterminer un triangle rectangle dont les côtés*

soient des nombres entiers, et dont la surface soit égale au périmètre.

En désignant par x et y les côtés de l'angle droit, par z l'hypoténuse, les équations du problème sont

$$[1] \quad \left\{ \begin{array}{l} x+y+z=\frac{1}{2}xy, \\ z=\sqrt{x^2+y^2}, \end{array} \right.$$

et, en éliminant z,

$$x+y+\sqrt{x^2+y^2}=\tfrac{1}{2}xy,$$

ou

$$\sqrt{x^2+y^2}=\tfrac{1}{2}xy-x-y;$$

élevant au carré, il vient

$$x^2+y^2=\tfrac{1}{4}x^2y^2-xy(x+y)+x^2+y^2+2xy,$$

ou, en supprimant les termes communs aux deux membres et divisant par x et par y que nous ne supposons pas nuls,

$$\tfrac{1}{4}xy-(x+y)+2=0,$$

d'où

$$y=\frac{4x-8}{x-4},$$

ou

$$[2] \quad y=4+\frac{8}{x-4};$$

$x-4$, devant diviser 8, doit être l'un des nombres ± 1, ± 2, ± 4, ± 8, mais comme ici x et y doivent être positifs, il ne faut prendre pour $x-4$ que les valeurs $+1$, $+2$, $+4$, $+8$; on a ainsi

$$\begin{array}{ll|ll} x=5, & y=12, & x=8, & y=6, \\ x=6, & y=8, & x=12, & y=5, \end{array}$$

mais les deux solutions à droite donnent les mêmes triangles que les deux solutions à gauche. Le problème n'a donc que deux solutions. Dans chacune d'elles la valeur de z est donnée par l'une des équations [1]; on a ainsi

$$x=5, \quad y=12, \quad z=13,$$
$$x=6, \quad y=8, \quad z=10.$$

Digitized by Google

Résolution en nombres entiers de l'équation $x^2 + y^2 = z^2$.

225. L'équation proposée peut s'écrire ainsi

[1] $$z^2 - y^2 = x^2,$$

ou $$(z-y)(z+y) = x^2;$$

soit ρ le plus grand commun diviseur à $z-y$ et $z+y$, on a

[2] $$\frac{z-y}{\rho} \cdot \frac{z+y}{\rho} = \left(\frac{x}{\rho}\right)^2.$$

Les nombres entiers $\frac{z-y}{\rho}$ et $\frac{z+y}{\rho}$ sont premiers entre eux, et comme leur produit est un carré, il faut que chacun d'eux soit un carré; on a donc, en désignant par α et β, des nombres entiers

[3] $$\frac{z+y}{\rho} = \alpha^2, \quad \frac{z-y}{\rho} = \beta^2,$$

et l'équation [2] donne

[4] $$\frac{x}{\rho} = \alpha\beta;$$

réciproquement les valeurs de x, y, z tirées des équations [3] et [4], savoir :

[5] $$x = \rho\alpha\beta, \quad y = \frac{\rho}{2}(\alpha^2 - \beta^2), \quad z = \frac{\rho}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$$

satisferont à l'équation [1], quels que soient les entiers α, β et ρ.

Remarque I. Chaque solution de l'équation proposée, en fournit une infinité d'autres que l'on obtient en multipliant les valeurs de x, y, z, par un nombre entier quelconque; il y a donc lieu surtout de considérer les solutions dans lesquelles les valeurs de x, y, z sont des nombres premiers entre eux. Deux de ces nombres sont évidemment impairs et le troisième pair.

Supposons d'abord que le nombre pair soit x, $z-y$ et

Digitized by Google

$z+y$ ont alors pour plus grand commun diviseur 2, et les formules [5] deviennent

$$[6] \qquad x=2\alpha\beta, \quad y=\alpha^2-\beta^2, \quad z=\alpha^2+\beta^2,$$

où l'on ne devra donner aux entiers α et β que des valeurs entières premières entre elles.

On peut se dispenser de donner à α et à β des valeurs qui soient toutes deux impaires, car les équations [5] fournissent alors pour z et y des valeurs paires; tandis que, au contraire, nous les avons supposées toutes deux impaires; d'ailleurs si l'on prenait pour α et β, des nombres impairs $2m+1$, $2n+1$; les valeurs de x, y, z, divisées par 2, seraient

$$x=(m+n+1)^2-(m-n)^2, \quad y=2(m+n+1)(m-n),$$
$$z=(m+n+1)^2+(m-n)^2;$$

ou, en changeant x en y et y en x, ce qui donne la même solution,

$$x=2(m+n+1)(m-n), \quad y=(m+n+1)^2-(m-n)^2,$$
$$z=(m+n+1)^2+(m-n)^2.$$

Il résulte de là que faire dans les formules [6] $\alpha=2m+1$, $\beta=2n+1$, puis diviser par 2 les valeurs de x, y et z, est la même chose que faire dans ces mêmes formules [6], $\alpha=m+n+1$, $\beta=m-n$.

Si y était pair, on pourrait appliquer le raisonnement précédent en changeant x en y.

Si z est pair, $z+y$ et $z-y$ sont premiers entre eux, et, par suite, dans les formules [5], il faut faire $\rho=1$. On obtient ainsi

$$[7] \qquad x=\alpha\beta, \quad y=\frac{\alpha^2-\beta^2}{2}, \quad z=\frac{\alpha^2+\beta^2}{2};$$

mais α et β devant, d'après les formules [3], être tous deux impairs, $(\alpha^2-\beta^2)=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$ sera divisible par 4, et, par suite, $\frac{\alpha^2-\beta^2}{2}$, ou y serait pair, ce qui est contraire à notre supposition; les seules solutions sont donc celles que fournissent les formules [6], pour des valeurs de α premières entre elles, l'une paire, l'autre impaire.

Digitized by Google

Voici le tableau des solutions en nombres premiers entre eux de l'équation

$$x^2+y^2=z^2,$$

pour toutes les valeurs de α et β de 1 à 10 :

$\beta=1$	$\alpha=2$,	$x=4$,	$y=3$,	$z=5$,
	$\alpha=4$,	$x=8$,	$y=15$,	$z=17$,
	$\alpha=6$,	$x=12$,	$y=35$,	$z=37$,
	$\alpha=8$,	$x=16$,	$y=63$,	$z=65$,
	$\alpha=10$,	$x=20$,	$y=99$,	$z=101$.
$\beta=2$	$\alpha=3$,	$x=12$,	$y=5$,	$z=13$,
	$\alpha=5$,	$x=20$,	$y=21$,	$z=29$,
	$\alpha=7$,	$x=28$,	$y=45$,	$z=53$,
	$\alpha=9$,	$x=36$,	$y=77$,	$z=83$.
$\beta=3$	$\alpha=4$,	$x=24$,	$y=7$,	$z=25$,
	$\alpha=8$,	$x=48$,	$y=35$,	$z=73$,
	$\alpha=10$,	$x=60$,	$y=91$,	$z=109$.
$\beta=4$	$\alpha=5$,	$x=40$,	$y=9$,	$z=41$,
	$\alpha=7$,	$x=56$,	$y=33$,	$z=65$,
	$\alpha=9$,	$x=72$,	$y=65$,	$z=97$.
$\beta=5$	$\alpha=6$,	$x=60$,	$y=11$,	$z=61$,
	$\alpha=8$,	$x=80$,	$y=39$,	$z=89$.
$\beta=6$	$\alpha=7$,	$x=84$,	$y=13$,	$z=85$.
$\beta=7$	$\alpha=8$,	$x=112$,	$y=15$,	$z=113$,
	$\alpha=10$,	$x=140$,	$y=51$,	$z=149$.
$\beta=8$	$\alpha=9$,	$x=144$,	$y=17$,	$z=145$.
$\beta=9$	$\alpha=10$,	$x=180$,	$y=19$,	$z=181$.

Résolution, en nombres entiers, de l'équation $x^2-xy+y^2=z^2$.

226. Résoudre en nombres entiers, positifs ou négatifs, l'équation

$$[1] \qquad x^2-xy+y^2=z^2,$$

c'est chercher les triangles dont un angle est égal à 60° ou à 120°, et dont les côtés s'expriment par des nombres entiers.

En multipliant l'équation [1] par 4, on a

$$4x^2 - 4xy + 4y^2 = 4z^2,$$

ou $$(2x - y)^2 + 3y^2 = 4z^2,$$

si donc on désigne par u une nouvelle variable, et qu'on fasse

[2] $$2x - y = u,$$

l'équation [1] devient

$$u^2 + 3y^2 = 4z^2,$$

ou

[3] $$3y^2 = 4z^2 - u^2 = (2z + u)(2z - u).$$

Soit ρ le plus grand commun diviseur à $2z + u$ et $2z - u$, on aura

$$\frac{2z + u}{\rho} \cdot \frac{2z - u}{\rho} = 3\left(\frac{y}{\rho}\right)^2,$$

l'un des entiers $\frac{2z + u}{\rho}$, $\frac{2z - u}{\rho}$ doit être divisible par 3, et comme rien n'indique que u soit plutôt positif que négatif, nous pouvons supposer que c'est $\frac{2z + u}{\rho}$ qui est divisible par 3, on peut donc écrire

$$\frac{2z + u}{3\rho} \cdot \frac{2z - u}{\rho} = \left(\frac{y}{\rho}\right)^2.$$

Le produit des nombres $\frac{2z + u}{3\rho}$, $\frac{2z - u}{\rho}$ étant carré, et ces nombres étant évidemment premiers entre eux, chacun d'eux doit être carré, on a donc, en désignant par α et β, des nombres entiers

$$\frac{2z + u}{3\rho} = \alpha^2, \quad \frac{2z - u}{\rho} = \beta^2,$$

et, par suite, $$\frac{y}{\rho} = \alpha\beta.$$

Réciproquement les valeurs de u, y et z tirées de ces équations, savoir :

$$u = \frac{\rho}{2}(3\alpha^2 - \beta^2), \quad y = \rho\alpha\beta, \quad z = \frac{\rho}{4}(3\alpha^2 + \beta^2)$$

satisferont à l'équation [3], quels que soient les entiers ρ, α, β.

Pour avoir les solutions de la proposée [1], on joindra à ces équations, l'équation [2], on a ainsi

$$x = \frac{\rho}{4}(3\alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2), \quad y = \frac{\rho}{4}\cdot 4\alpha\beta, \quad z = \frac{\rho}{4}(3\alpha^2 + \beta^2).$$

Et l'on démontre facilement qu'en faisant $\rho = 4$, on a toutes les solutions premières entre elles, on obtient ainsi

$$x = 3\alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2, \quad y = 4\alpha\beta, \quad z = 3\alpha^2 + \beta^2,$$

où l'on donnera à α et β toutes les valeurs entières positives ou négatives, premières entre elles.

Résolution en nombres entiers de l'équation $x^2 + y^2 = z^4$.

227. On satisfait à ces équations par

$$x = \alpha^2 - \beta^2, \quad y = 2\alpha\beta, \quad z^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

Il n'y a donc plus qu'à résoudre en nombres entiers

$$z^2 = \alpha^2 + \beta^2;$$

on prendra donc

$$\alpha = \gamma^2 - \delta^2, \quad \beta = 2\gamma\delta, \quad z = \gamma^2 + \delta^2;$$

par suite, les solutions premières entre elles de la proposée seront représentées par

$$\left\{\begin{aligned} x &= (\gamma^2 - \delta^2)^2 - 4\gamma^2\delta^2,\\ y &= 4\gamma\delta(\gamma^2 - \delta^2),\\ z &= \gamma^2 + \delta^2,\end{aligned}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{aligned} x &= (\gamma^2 + 2\gamma\delta - \delta^2)(\gamma^2 - 2\gamma\delta - \delta^2);\\ y &= 4\gamma\delta(\gamma^2 - \delta^2),\\ z &= \gamma^2 + \delta^2,\end{aligned}\right.$$

où γ et δ sont des entiers indéterminés premiers entre eux.

Remarque. On résoudrait, par le même procédé, l'équation $x^2 + y^2 = z^8$, et plus généralement l'équation $x^2 + y^2 = z^{2^\mu}$, quel que soit l'entier μ.

Sur l'équation $x^4 + y^4 = z^2$.

228. L'équation $x^4 + y^4 = z^2$ est impossible en nombres entiers. Cette proposition se démontre à l'aide d'une méthode remar-

quable que nous croyons devoir indiquer ici, parce qu'on peut l'appliquer à plusieurs questions du même genre. Cette méthode consiste à prouver que si l'équation proposée admet une solution (x, y, z), elle en admet une seconde (ξ, η, ζ) exprimée en nombres beaucoup moindres, et comme on peut raisonner de même sur cette seconde solution, et que d'ailleurs il y a une limite à la décroissance des nombres entiers, on en conclut avec certitude l'impossibilité de l'existence d'une première solution.

Si l'équation

$$x^4 + y^4 = z^2$$

est possible en nombres entiers (qu'on peut toujours supposer premiers entre eux), on aura (225)

$$[1] \qquad x^2 = \alpha^2 - \beta^2, \quad y^2 = 2\alpha\beta, \quad z = \alpha^2 + \beta^2,$$

α et β étant des entiers premiers entre eux, l'un pair, l'autre impair.

Le produit $2\alpha\beta$ est un carré y^2, d'ailleurs 2α et β ou α et 2β sont premiers entre eux; par conséquent, chacun de ces nombres est un carré, on peut donc poser

$$2\alpha = (2\mu)^2 \quad \text{et} \quad \beta = \nu^2,$$

ou

$$\alpha = \mu^2 \quad \text{et} \quad 2\beta = (2\nu)^2;$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \alpha = 2\mu^2, \\ \beta = \nu^2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \alpha = \mu^2, \\ \beta = 2\nu^2; \end{cases}$$

alors les équations [1] deviennent

$$\begin{cases} x^2 = 4\mu^4 - \nu^4 \\ y^2 = 4\mu^2\nu^2, \\ z = 4\mu^4 + \nu^4, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x^2 = \mu^4 - 4\nu^4, \\ y^2 = 4\mu^2\nu^2, \\ z = \mu^4 + 4\nu^4; \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$[2] \qquad x^2 = 4\mu^4 - \nu^4, \quad y = 2\mu\nu, \quad z = 4\mu^4 + \nu^4,$$

ou

$$[3] \qquad x^2 = \mu^4 - 4\nu^4, \quad y = 2\mu\nu, \quad z = \mu^4 + 4\nu^4.$$

Digitized by Google

Ainsi la recherche des solutions entières de l'équation [1] est ramenée à chercher les solutions entières de l'une des équations

$$[4] \qquad x^2 = 4\mu^4 - \nu^4,$$

$$[5] \qquad x^2 = \mu^4 - 4\nu^4;$$

or, je dis d'abord que l'équation [4] n'admet aucune solution entière. En effet, ν y désigne un nombre impair, x est aussi impair, et les deux facteurs de $4\mu^4 - \nu^4$, savoir $2\mu^2 - \nu^2$ et $2\mu^2 + \nu^2$ sont premiers entre eux, puisqu'ils sont impairs et que μ et ν sont premiers entre eux, il faut donc que $2\mu^2 + \nu^2$ et $2\mu^2 - \nu^2$ soient des carrés. Posons

$$2\mu^2 + \nu^2 = f^2, \quad 2\mu^2 - \nu^2 = g^2,$$

il en résultera $\quad 2\nu^2 = f^2 - g^2 = (f-g)(f+g),$

or, cela est impossible, car le premier membre est double d'un impair, tandis que le second est divisible par 4, attendu que $f+g$ et $f-g$ sont tous deux pairs.

L'équation [4] n'ayant pas de solutions entières, occupons-nous de l'équation [5].

$\mu^2 - 2\nu^2$ et $\mu^2 + 2\nu^2$ étant premiers entre eux, chacun d'eux est carré. Posons

$$\mu^2 + 2\nu^2 = f^2, \quad \mu^2 - 2\nu^2 = g^2,$$

d'où

$$x = fg,$$

puis

$$[6] \qquad 2\mu^2 = f^2 + g^2, \quad 4\nu^2 = f^2 - g^2.$$

Les nombres f et g étant impairs et premiers entre eux, $f+g$ et $f-g$ ont 2 pour plus grand commun diviseur, donc $\frac{f+g}{2}$ et $\frac{f-g}{2}$ sont des carrés, puisque leur produit est carré, on aura

$$\frac{f+g}{2} = \xi^2, \quad \frac{f-g}{2} = \eta^2,$$

d'où

$$f = \xi^2 + \eta^2, \quad g = \xi^2 - \eta^2;$$

par suite, la première des équations [6] devient

$$[7] \qquad \xi^4 + \eta^4 = \mu^2.$$

Cette équation [7] est de même forme que la proposée; et l'on voit que ξ, η, μ y désignent des nombres beaucoup plus petits que x, y, z. Comparant, par exemple, les seconds membres z et μ, on a (formule [3])

$$z=\mu^4+4\nu^4,$$

par conséquent, $$z>\mu^4.$$

On peut donc conclure de là que la proposée n'admet aucune solution.

De l'emploi des expressions imaginaires dans l'analyse indéterminée.

229. On fait quelquefois usage des expressions imaginaires dans l'analyse indéterminée des degrés supérieurs. On arrive ainsi à des résultats qu'il serait souvent difficile d'obtenir par un procédé plus direct. Nous allons en donner quelques exemples.

Problème I. *Résoudre en nombres commensurables l'équation*

$$[1] \qquad x^2+y^2=z^2.$$

Cette équation peut s'écrire

$$[2] \qquad (x+y\sqrt{-1})(x-y\sqrt{-1})=z^2.$$

Nous pouvons poser

$$[3] \qquad x+y\sqrt{-1}=(\alpha+\beta\sqrt{-1})^2,$$

$$[4] \qquad x-y\sqrt{-1}=(\alpha-\beta\sqrt{-1})^2;$$

il suffit, pour cela, de prendre

$$x=\alpha^2-\beta^2, \quad y=2\alpha\beta,$$

quelles que soient d'ailleurs les indéterminées α et β.

Si maintenant on multiplie entre elles les équations [3] et [4], on aura, en ayant égard à l'équation [1],

$$(\alpha^2+\beta^2)^2=z^2,$$

ce qui montre que la valeur correspondante de z est $\alpha^2+\beta^2$. Le problème sera donc résolu par les formules

$$x=\alpha^2-\beta^2, \quad y=2\alpha\beta, \quad z=\alpha^2+\beta^2,$$

en donnant à α et à β des valeurs commensurables.

Remarque. Le procédé que nous venons d'employer conduit aux solutions déjà trouvées (223); mais il ne fait pas voir si elles sont les seules possibles.

Problème II. *Résoudre en nombres commensurables l'équation*

$$[1] \qquad ax^2 + by^2 = z^m.$$

Cette équation peut s'écrire

$$[2] \qquad (x\sqrt{a} + y\sqrt{b}\sqrt{-1})(x\sqrt{a} - y\sqrt{b}\sqrt{-1}) = z^m.$$

Il est permis de poser

$$[3] \qquad x\sqrt{a} + y\sqrt{b}\sqrt{-1} = (\alpha\sqrt{a} + \beta\sqrt{b}\sqrt{-1})^m,$$

$$[4] \qquad x\sqrt{a} - y\sqrt{b}\sqrt{-1} = (\alpha\sqrt{a} - \beta\sqrt{b}\sqrt{-1})^m;$$

car il suffit, pour cela, de prendre

$$[5] \qquad x\sqrt{a} = \alpha^m\sqrt{a^m} - \frac{m(m-1)}{1.2}\alpha^{m-2}\sqrt{a^{m-2}}\beta^2 b + \ldots$$

$$[6] \qquad y\sqrt{b} = m\alpha^{m-1}\sqrt{a^{m-1}}\sqrt{b} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\alpha^{m-3}\sqrt{a^{m-3}}\beta^3\sqrt{b^3} + \ldots$$

quelles que soient d'ailleurs les indéterminées α et β. Seulement si α et β sont commensurables, x et y le seront dans le cas de m impair, mais ne le seront, dans le cas de m pair, que si a est un carré parfait.

Si maintenant on multiplie les équations [3] et [4], on aura, en ayant égard à l'équation [1],

$$(a\alpha^2 + b\beta^2)^m = z^m,$$

ce qui donne

$$[7] \qquad z = a\alpha^2 + b\beta^2.$$

Le problème sera donc résolu, dans le cas de m impair, par les valeurs de x, y et z tirées des équations [5], [6] et [7], en ne donnant à α et β que des valeurs commensurables. Les mêmes formules ne résoudront le problème, dans le cas de m pair, que si a est un carré.

Digitized by Google

RÉSUMÉ.

203. But de l'analyse indéterminée. — **204**. Dans l'équation $ax+by=K$ on peut supposer les coefficients premiers entre eux. — **205**. Si a et b ont un diviseur commun, l'équation est impossible. — **206**. Si a et b sont premiers entre eux, l'équation admet une solution. — **207**. Lorsqu'une équation admet une solution, elle en admet un nombre infini. — **208**. Les diverses valeurs d'une même inconnue qui satisfont à l'équation $ax+by=k$, forment une progression arithmétique. — **209**. On peut, par des essais successifs, trouver une première solution. — **210**. On peut aussi trouver une solution en ramenant l'équation proposée à une autre dont les coefficients sont moindres, celle-ci à une troisième, et ainsi de suite. — **211**. Méthode de résolution fondée sur la théorie des fractions continues. — **212**. Moyen d'obtenir la solution minima. — **213**. Recherche des solutions entières et positives; nombre de ces solutions. — **214**. Recherche des valeurs de x propres à rendre entières des fractions de la forme $\frac{ax+b}{c}$. — **215**. Résolution d'une équation à trois inconnues; conditions de possibilité. — **216**. Formule qui donne toutes les solutions. — **217**. Moyen de trouver une solution d'une équation à un nombre quelconque d'inconnues. — **218**. Résolution de deux équations à trois inconnues. — **219**. Cas où l'on n'admet que des solutions positives. — **220**. Application à un problème. — **221**. Résolution de $m-1$ équations entre m inconnues. — **222**. Résolution en nombres entiers de l'équation du second degré à deux inconnues lorsque l'un des carrés manque. — **223**. Examen des cas particuliers où le produit des deux inconnues manque aussi. — **224**. Triangle rectangle dont le périmètre égale la surface. — **225**. Résolution de l'équation $x^2+y^2=z^2$. — **226**. Résolution de l'équation $x^2-xy+y^2=z^2$. — **227**. Résolution de l'équation $x^2+y^2=z^4$. — **228**. L'équation $x^4+y^4=z^2$ n'a pas de solutions entières. — **229**. Emploi des expressions imaginaires dans l'analyse indéterminée.

EXERCICES.

I. Si a, b, c, ... l sont des nombres premiers entre eux deux à deux; α un nombre inférieur et premier à a; β un nombre inférieur et premier à b, etc.; λ un nombre premier et infé-

Digitized by Google

rieur à l : il n'existe qu'un seul nombre $z < abc \ldots l$ qui soit en même temps

un multiple de $a+\alpha$,
un multiple de $b+\beta$,
. . . .
un multiple de $l+\lambda$.

II. Démontrer, en s'appuyant sur le théorème précédent, que si on désigne par E_a le nombre des entiers inférieurs et premiers à a, on aura, si $a, b, c, \ldots l$ sont premiers entre eux,

$$E_{abc\ldots l} = E_a E_b E_c \ldots E_l.$$

III. Démontrer que si

$$N = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda,$$

$a, b, c, \ldots l$ étant des nombres premiers différents, on aura

$$E_N = N\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{l}\right).$$

IV. Résoudre en nombres entiers l'équation

$$x^2 - xy + y^2 = z^3.$$

V. Transformer, par un changement de variables,

$$\sqrt{a+bx+cx^2}$$

en une expression rationnelle par rapport à la nouvelle variable.

VI. Trouver, dans un cercle de rayon donné, une corde commensurable avec le rayon et dont la distance au centre soit aussi commensurable.

VII. Le problème précédent étant résolu, trouver des polygones inscriptibles dont tous les côtés, les diagonales et la surface soient commensurables avec le rayon.

Digitized by Google

CHAPITRE XX.

DES ÉQUATIONS EXPONENTIELLES ET DES LOGARITHMES.

---

230. Une équation est dite exponentielle lorsque l'inconnue y figure comme exposant. La plus simple de toutes, la seule dont nous nous occuperons est l'équation

$$a^x = b,$$

dans laquelle x désigne l'inconnue, et a et b des nombres donnés.

Mais, avant tout, il est essentiel de revenir sur la définition de l'expresion a^x et d'y ajouter quelques développements. Si x est commensurable, l'expression a^x a été définie (35) et ne présente aucune obscurité. En supposant $x=\frac{m}{n}$, m et n étant entiers, on a

$$a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Nous supposerons toujours, dans ce chapitre, que a soit positif, et nous ne considérerons que les valeurs réelles et positives du radical; il n'y a donc là ni difficulté, ni ambiguïté.

Si x a une valeur commensurable négative $-m$, a^x est défini (37) par l'équation

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

Il reste donc à définir a^x pour les valeurs incommensurables positives ou négatives de x; mais pour cela, nous avons besoin de faire quelques remarques.

231. Remarque I. Toutes les puissances, positives ou négatives, d'un nombre positif sont positives. Cela résulte de ce

Digitized by Google

que, comme nous l'avons dit, nous ne considérons que les valeurs positives des radicaux.

232. Remarque II. Toutes les puissances positives d'un nombre plus grand que l'unité sont elles-mêmes plus grandes que l'unité, et toutes les puissances négatives sont moindres que l'unité.

Le contraire a lieu pour les puissances d'un nombre moindre que l'unité.

Soient, en effet, a un nombre plus grand que l'unité, et $a^{\frac{m}{n}}$ une puissance positive de a, on a, par définition,

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m};$$

or, a étant plus grand que l'unité, il en est évidemment de même de sa puissance entière a^m, et, par suite, de $\sqrt[n]{a^m}$.

Les puissances positives de a étant plus grandes que l'unité, l'égalité

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

montre que les puissances négatives, qui sont leurs inverses, sont moindres que l'unité.

Enfin, si l'on suppose à a une valeur moindre que l'unité, on peut le représenter par $\frac{1}{a'}$, a' étant plus grand que l'unité; on aura alors

$$a^x = \frac{1}{a'^x},$$

et il est évident que les valeurs de x, qui rendent a'^x plus grand que l'unité, rendent a^x plus petit, et réciproquement.

233. Remarque III. Si x reçoit des valeurs commensurables croissantes, l'expression a^x varie toujours dans le même sens, elle augmente si a est plus grand que l'unité, et diminue dans le cas contraire.

Soient, en effet, p et q deux valeurs commensurables, positives ou négatives, attribuées successivement à x, on a (39)

$$\frac{a^q}{a^p} = a^{q-p};$$

Digitized by Google

or $q-p$ est positif, puisque, par hypothèse, q est plus grand que p. Si donc a est plus grand que l'unité, il en sera de même (232) de a^{q-p}, et, par suite, on aura $a^q > a^p$. Si, au contraire, a est moindre que l'unité, il en sera de même de a^{q-p}, et l'on aura $a^q < a^p$; dans le premier cas, a^x augmente par conséquent quand x passe de la valeur p à la valeur q, et il diminue dans le second.

234. Remarque IV. On peut attribuer à x des valeurs commensurables assez rapprochées pour que a^x varie aussi peu qu'on le voudra.

Soit m une valeur commensurable quelconque de x. Je dis que l'on peut augmenter m d'une quantité α assez petite pour que la différence

$$a^{m+\alpha} - a^m$$

soit aussi petite qu'on le voudra.

On a $$a^{m+\alpha} = a^m . a^\alpha,$$

et par suite $$a^{m+\alpha} - a^m = a^m(a^\alpha - 1).$$

a^m est un nombre donné indépendant de α. Il suffit donc de prouver que $a^\alpha - 1$ peut être rendu aussi petit qu'on le voudra, par des valeurs suffisamment petites de α. Supposons d'abord a plus grand que l'unité. Quelle que soit la valeur positive de α, a^α sera toujours (232) plus grand que l'unité. Pour montrer qu'il en approche indéfiniment, il suffit de faire voir qu'il peut devenir plus petit qu'un nombre quelconque $1+\varepsilon$ supérieur à l'unité, et que l'on peut choisir α de manière que

$$a^\alpha < 1 + \varepsilon.$$

Posons, en effet, $\alpha = \frac{1}{k}$, l'inégalité précédente devient

$$(a)^{\frac{1}{k}} < 1 + \varepsilon,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(1 + \varepsilon)^k > a.$$

Or, un nombre $1+\varepsilon$, plus grand que l'unité, peut être élevé à une puissance assez élevée pour que le résultat surpasse un

Digitized by Google

nombre donné a; car si l'on considère les puissances entières de $(1+\varepsilon)$ on a évidemment, en posant $1+\varepsilon=h$,

$$\begin{aligned} h-1 &= \varepsilon, \\ h^2-h &= \varepsilon h > \varepsilon, \\ h^3-h^2 &= \varepsilon h^2 > \varepsilon, \\ &\vdots \\ h^k-h^{k-1} &= \varepsilon h^{k-1} > \varepsilon, \end{aligned}$$

et, par suite, en ajoutant les inégalités et supprimant les termes qui se détruisent,

$$h^k-1 > k\varepsilon,$$

h^k peut donc surpasser toute limite, car $k\varepsilon$ peut, évidemment, devenir aussi grand qu'on le voudra. La proposition est donc démontrée. Si a est moindre que 1, on le représentera par $\frac{1}{a'}$, a' étant plus grand que l'unité. a^α sera alors égal à $\frac{1}{a'^\alpha}$. Or a'^α différant, d'après ce qui précède, aussi peu que l'on voudra de l'unité, il en sera évidemment de même de a^α.

235. Les remarques qui précèdent nous permettent de définir a^x lorsque x est incommensurable. Nous dirons : a^x représente, pour une valeur incommensurable h, attribuée à x, un nombre compris entre les valeurs de a^x, qui correspondent à des valeurs commensurables de x moindres que h, et celles qui correspondent à des valeurs plus grandes que h. Cette définition, analogue à celle que nous donnons en arithmétique, pour les racines carrées et cubiques, assigne à a^h une valeur unique et déterminée. Si l'on suppose, en effet, pour fixer les idées, que les valeurs de a^x représentent des longueurs portées sur une ligne droite à partir d'une certaine origine, l'extrémité de celles qui correspondent à des valeurs de x moindres que h, occuperont une certaine région de la droite; celles qui correspondent aux valeurs de x plus grandes que h en occuperont une autre, et il résulte des remarques précédentes que ces régions seront entièrement séparées, et qu'il ne pourra exister entre elles aucun intervalle d'étendue finie, mais seulement un point de démarcation. La distance à laquelle se trouve ce point mesure a^h.

Résolution de l'équation $a^x = b$.

236. En supposant, comme nous l'avons dit, que a et b soient des nombres positifs donnés, l'équation $a^x = b$ admet toujours une solution, et n'en admet qu'une seule. Pour le démontrer, supposons que x varie, en augmentant, depuis une valeur négative très-grande $-N$ jusqu'à une valeur positive très-grande $+N'$, a^x (**233**) variera toujours dans le même sens, en augmentant si a est plus grand que l'unité, et diminuant dans le cas contraire, depuis a^{-N} jusqu'à $a^{N'}$; or a^{-N} et $a^{N'}$ désignent deux nombres, l'un aussi petit, l'autre aussi grand que l'on veut, et qui pourront toujours comprendre entre eux le nombre donné b, quelque grand ou quelque petit qu'il soit. Et comme a^x (**234**) ne peut pas passer brusquement d'une valeur à une autre sans prendre les valeurs intermédiaires, il faudra que, dans cet intervalle, il prenne une fois la valeur b.

237. Étant assuré que l'équation

$$a^x = b \qquad [1]$$

a une solution et n'en a qu'une seule, nous allons chercher à déterminer les fractions intégrantes successives de la fraction continue qui représente cette solution. Nous obtiendrons ainsi (**200**) des valeurs approchées de x, aussi simples que possible, eu égard au degré d'approximation.

Supposons d'abord a et b plus grands que l'unité. Si nous donnons à x les valeurs successives 0, 1, 2, 3, 4, etc., jusqu'à ce qu'on trouve deux puissances consécutives de a, a^n et a^{n+1}, qui comprennent b de telle sorte que

$$a^n < b,$$
$$a^{n+1} > b,$$

x sera évidemment compris entre n et $n+1$, et l'on pourra poser

$$x = n + \frac{1}{y}, \qquad [2]$$

y devant être déterminé par la condition

$$a^{n+\frac{1}{y}}=b,$$

ou $$a^n.a^{\frac{1}{y}}=b;$$

d'où l'on déduit $$a^{\frac{1}{y}}=\frac{b}{a^n},$$

[3] $$a=\left(\frac{b}{a^n}\right)^y;$$

et, par conséquent, l'équation qui doit déterminer y est de même forme que la proposée; les nombres donnés a et b sont seulement remplacés par d'autres nombres donnés $\frac{b}{a^n}$ et a, qui, comme eux, sont plus grands que l'unité.

Donnons à y les valeurs successives 1, 2, 3, ..., jusqu'à ce qu'on trouve deux puissances consécutives de $\frac{b}{a^n}$, $\left(\frac{b}{a^n}\right)^m$, $\left(\frac{b}{a^n}\right)^{m+1}$, qui comprennent a de telle sorte que

$$\left(\frac{b}{a^n}\right)^m<a,$$

$$\left(\frac{b}{a^n}\right)^{m+1}>a.$$

y sera évidemment compris entre m et $m+1$, et l'on pourra poser

[4] $$y=m+\frac{1}{z},$$

z devant être déterminé par la condition

$$\left(\frac{b}{a^n}\right)^{m+\frac{1}{z}}=a,$$

que l'on mettra aisément sous la forme

[5] $$\left\{\frac{a}{\left(\frac{b}{a^n}\right)^m}\right\}^z=\frac{b}{a^n}.$$

Nous avons donc, pour déterminer z, une nouvelle équation

Digitized by Google

exponentielle. Nous pourrons, par des substitutions successives, trouver la partie entière p de z, et en posant

[6] $$z = p + \frac{1}{u},$$

former une nouvelle équation exponentielle à laquelle satisfera u. Les équations [2], [4], [6] donneront évidemment

$$x = m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{u}}},$$

et en continuant de la même manière, on obtiendra autant de quotients incomplets que l'on voudra de la fraction continue qui représente x.

Exemple. Soit à résoudre l'équation

$$2^x = 7.$$

7 étant compris entre 2^2 ou 4 et 2^3 ou 8, on posera

$$x = 2 + \frac{1}{y};$$

d'où l'on conclut $$\left(\frac{7}{4}\right)^y = 2.$$

2 étant compris entre $\frac{7}{4}$ et $\left(\frac{7}{4}\right)^2$ ou $\frac{49}{16}$, on posera

$$y = 1 + \frac{1}{z};$$

d'où l'on conclut $$\left(\frac{8}{7}\right)^z = \frac{7}{4}.$$

$\frac{7}{4}$, étant compris entre $\left(\frac{8}{7}\right)^4$ ou $\frac{4096}{2401}$ et $\left(\frac{8}{7}\right)^5$ ou $\frac{32768}{16807}$, on posera

$$z = 4 + \frac{1}{u};$$

d'où l'on conclut

$$\left(\frac{16807}{16384}\right)^u = \frac{8}{7},$$

et l'on pourra, par des substitutions, trouver la partie entière de u. En arrêtant là l'opération, nous avons

$$x = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{u}}}.$$

Les premières réduites sont 2, 3, $\frac{14}{5}$; on peut donc prendre $\frac{14}{5}$ pour valeur approchée de x.

238. Lorsque a et b ne sont pas plus grands que l'unité, il est très-facile de transformer l'équation

$$[1] \qquad a^x = b,$$

en une autre qui remplisse cette condition.

Soient, en effet, $a > 1$, $b < 1$, on résoudra l'équation

$$a^x = \frac{1}{b},$$

et il suffira évidemment, pour satisfaire à [1], de prendre, avec le signe —, la valeur positive trouvée par x.

Soient $a < 1$, $b > 1$, on résoudra

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = b,$$

et la valeur de x, prise avec le signe —, satisfera à l'équation [1].

Soient enfin $a < 1$, $b < 1$, on résoudra l'équation

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{b},$$

qui équivaut évidemment à l'équation [1].

Digitized by Google

Définition des logarithmes.

239. Lorsque l'on a la relation

$$a^x = b,$$

on dit que x est le *logarithme* du nombre b dans la base a, et on l'écrit ainsi :

$$x = \log b.$$

L'ensemble des logarithmes des différents nombres correspondants à une même base a, forme ce que l'on nomme un *système de logarithmes*. Les logarithmes d'un même système jouissent de propriétés fort importantes que nous allons d'abord démontrer. Nous supposons toujours la base positive.

Propriétés des logarithmes.

240. *Le logarithme du produit de deux nombres est égal à la somme des logarithmes de ces nombres.*

Soient, en effet, x et y les logarithmes des nombres b et c, on a (237)

$$a^x = b,$$

$$a^y = c;$$

et, en multipliant ces deux équations membre à membre,

$$a^{x+y} = bc,$$

par suite $x + y$ est le logarithme de bc, et l'on a

$$\log bc = \log b + \log c.$$

241. *Le logarithme du quotient de deux nombres est égal à la différence des logarithmes de ces nombres.*

Soient, en effet, x et y les logarithmes de deux nombres b et c, on a (237)

$$a^x = b,$$

$$a^y = c,$$

Digitized by Google

et, en divisant ces deux équations membre à membre,

$$a^{x-y} = \frac{b}{c},$$

par suite $x-y$ est le logarithme de $\frac{b}{c}$, et l'on a

$$\log \frac{b}{c} = \log b - \log c.$$

242. *Le logarithme de la puissance* n^{me} *d'un nombre est égal, quel que soit* n *(entier ou fractionnaire, positif ou négatif), au produit de* n *par le logarithme de ce nombre.*

Soit x le logarithme de b, on a

$$a^x = b;$$

d'où, en élevant les deux membres à la puissance n,

$$a^{nx} = b^n;$$

par suite nx est le logarithme de b^n, et l'on a

$$\log b^n = n \log b.$$

243. *Dans un système quelconque de logarithmes, l'unité a pour logarithme zéro, et la base du système a pour logarithme l'unité.*

On a, en effet, quel que soit a,

$$a^0 = 1,$$
$$a^1 = a.$$

244. *Lorsque la base d'un système est plus grande que l'unité, les nombres plus grands que l'unité ont des logarithmes positifs, et les nombres moindres que l'unité ont des logarithmes négatifs. Le contraire a lieu lorsque la base est moindre que l'unité.*

On a vu, en effet (232), que les puissances positives d'un nombre plus grand que l'unité sont plus grandes que l'unité, et ses puissances négatives sont moindres que l'unité. Le contraire a lieu pour les puissances des nombres moindres que l'unité. Si donc a est plus grand que l'unité, l'équation

$$a^x = b$$

exige que x, c'est-à-dire $\log b$, soit positif ou négatif, suivant que b est plus grand ou plus petit que l'unité.

Si, au contraire, a est moindre que l'unité, l'équation

$$a^x = b$$

exige que x ou $\log b$ soit négatif si b est plus grand que l'unité, et positif dans le cas contraire.

Remarque. Les nombres négatifs n'ont pas de logarithmes : car les puissances, positives ou négatives, d'une base positive sont toutes positives.

245. *Les logarithmes de différents nombres étant donnés dans un certain système, pour obtenir les logarithmes des mêmes nombres dans un autre système, il faudra les multiplier tous par un même facteur.*

Soient a et a' les bases de deux systèmes, x et x' les logarithmes d'un même nombre b, on a

[1] $$a^x = b, \quad a'^{x'} = b.$$

Nommons M le logarithme de a' dans la base a, de telle sorte que

$$a^{M} = a',$$

la seconde des équations [1] pourra s'écrire

$$a^{Mx'} = b,$$

et par suite on doit avoir

$$Mx' = x.$$

x peut donc s'obtenir en multipliant x' par le facteur M, qui est évidemment indépendant de b. Ce facteur M se nomme le module du système dont la base est a.

Identité des logarithmes algébriques et arithmétiques.

246. Il est essentiel de démontrer que les logarithmes, tels que nous les avons définis, ne diffèrent pas de ceux que l'on considère en arithmétique, et qui naissent de la considération de deux progressions.

Digitized by Google

Si l'on considère, en effet, des nombres en progression par quotient commençant par l'unité :

$$\div\div 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 : q^5 : \ldots : q^n : q^{n+1},$$

et que l'on nomme x le logarithme de q, les logarithmes des différents termes de cette progression seront (**240**)

$$0,\ x,\ 2x,\ 3x, \ldots,\ nx,\ (n+1)x,$$

et formeront, par conséquent, une progression arithmétique commençant par 0.

Si maintenant on insère un nombre k de moyens entre les termes consécutifs des deux progressions, on dit, en arithmétique, que les termes introduits par là dans la progression par différence, sont les logarithmes des termes correspondants dans la progression par quotient. Or nous allons voir que les conséquences de cette définition sont d'accord avec celle que nous avons donnée en algèbre.

Si, en effet, nous insérons k moyens entre les termes q^n, q^{n+1} de la progression par quotient et les termes nx, $(n+1)x$ de la progression par différence, les raisons des progressions formées par ces moyens seront (voy. l'*Arithmétique*).

$$\sqrt[k+1]{q}, \quad \frac{x}{k+1},$$

et le p^{me} moyen sera, dans la progression par quotient,

$$q^n \times (\sqrt[k+1]{q})^p,$$

et dans la progression par différence

$$nx + p\left(\frac{x}{k+1}\right);$$

mais on a
$$q^n \times (\sqrt[k+1]{q})^p = q^{n+\frac{p}{k+1}},$$

$$nx + p\left(\frac{x}{k+1}\right) = x\left(n + \frac{p}{k+1}\right);$$

et, puisque x est, par hypothèse, le logarithme de q, le second de ces nombres est bien (**240**) le logarithme du premier.

247. Nous venons de voir qu'un système de logarithmes, tel que nous l'avons défini, peut toujours résulter de la considéra-

Digitized by Google

tion de deux progressions convenablement choisies, et rentre dans les systèmes considérés en arithmétique. On peut faire voir aussi que le système de logarithmes défini par deux progressions quelconques, satisfait toujours à la définition donnée (239).

Soit, en effet, le système défini par les deux progressions

$$1 \quad q \quad q^2 \quad \ldots \quad q^n,$$
$$0 \quad \delta \quad 2\delta \quad \ldots \quad n\delta.$$

Posons $$q^n = \beta, \quad n\delta = \gamma,$$

γ étant, évidemment, le logarithme de β, on tire de la seconde de ces équations

$$n = \frac{\gamma}{\delta},$$

et, en remettant cette valeur dans la première,

$$q^{\frac{\gamma}{\delta}} = \beta,$$

ou $$\left(q^{\frac{1}{\delta}}\right)^\gamma = \beta.$$

γ est donc la puissance à laquelle il faut élever la base fixe $q^{\frac{1}{\delta}}$ pour reproduire le nombre β.

Tables de logarithmes.

248. D'après ce qui a été dit (237), on peut trouver approximativement le logarithme d'un nombre b dans une base donnée a, en réduisant en fraction continue la solution de l'équation

$$a^x = b.$$

Mais ce procédé entraînerait des calculs fort pénibles. Il en existe de beaucoup plus simples que nous ne pouvons indiquer ici.

Les logarithmes dont on fait habituellement usage sont calculés dans le système dont la base est 10.

Les tables de Callet font connaître, avec sept décimales exactes, les logarithmes de tous les nombres entiers moindres

Digitized by Google

que 108000, il est important de se familiariser avec ces tables dont nous allons indiquer les dispositions et l'usage.

Dispositions des tables de logarithmes de Callet.

249. La seule inspection d'un nombre fait connaître la partie entière de son logarithme. Ainsi les nombres de deux chiffres compris entre 10 et 100 ont des logarithmes compris entre 1 et 2, dont la partie entière est 1. Les nombres de trois chiffres compris entre 100 et 1000 ont des logarithmes compris entre 2 et 3, dont la partie entière est 2; et, en général, un nombre de n chiffres étant compris entre 10^{n-1} et 10^n, son logarithme est compris entre $n-1$ et n, et sa partie entière est par conséquent $n-1$.

On a profité de cette remarque pour se dispenser d'inscrire dans les tables la partie entière, ou, comme on l'appelle souvent, la *caractéristique* des logarithmes.

250. La première table est toute simple; elle contient les nombres naturels depuis 1 jusqu'à 1200, disposés suivant leur ordre en plusieurs colonnes, au haut desquelles on voit la lettre N, initiale du mot *nombre*; à côté et à droite de ces colonnes, on en remarque d'autres, au haut desquelles est écrit Log., initiales du mot *logarithmes*; de manière que chaque colonne de nombres est immédiatement suivie d'une colonne de logarithmes, et que chaque logarithme est placé à droite et dans l'alignement du nombre auquel il appartient. On n'a pas mis de caractéristique aux logarithmes, parce qu'on la connaît aisément à la seule inspection du nombre.

Cette table est nommée *Chiliade* I, parce qu'en effet elle contient les logarithmes du premier mille. (*Chiliade* est un mot grec francisé, qui signifie assemblage de mille unités.)

Les tables suivantes sont un peu plus composées; elles s'étendent depuis 1020 jusqu'à 108000. La première colonne, qu'on y remarque vers la gauche, est intitulée N, et contient les nombres naturels depuis 1020 jusqu'à 10800. La colonne suivante, marquée 0, offre les logarithmes qui appartiennent à ces nombres; en sorte que l'assemblage de ces deux colonnes forme la suite de la table première, et donne sur-le-champ les logarithmes des nombres depuis 1020 jusqu'à 10800.

Si l'on observe la colonne marquée 0, on verra vers la gauche de cette colonne certains nombres isolés de trois chiffres chacun, qui vont toujours en augmentant d'une unité, et qui ne sont pas à des distances tout à fait égales les uns des autres. Vers la droite de la même colonne, sont des nombres de quatre chiffres chacun, qui ne laissent point d'intervalle entre eux; en sorte qu'on pourrait croire que certains logarithmes n'ont que quatre chiffres, tandis que d'autres en ont sept.

Mais qu'on ne s'y trompe pas, chaque nombre isolé est censé écrit au-dessous de lui-même, et vis-à-vis chacun des nombres de quatre chiffres qui sont dans la même colonne, autant de fois qu'il est nécessaire pour que chaque ligne soit remplie : lors donc qu'on ne trouve vis-à-vis un certain nombre que quatre chiffres dans la colonne marquée 0, il faut écrire vers la gauche de ces quatre chiffres le nombre isolé de trois chiffres le plus prochain en montant. Au delà de 10000 les nombres isolés ont quatre figures.

Lorsque deux nombres sont décuples l'un de l'autre, leurs logarithmes ont pour différence le logarithme de 10 qui est 1, et par conséquent, leur partie décimale est la même; ainsi l'assemblage des deux premières colonnes dont nous venons de parler, donne aussi de dix en dix les logarithmes des nombres compris entre 10200 et 108000. Pour trouver les logarithmes des nombres intermédiaires, il faut avoir recours aux colonnes marquées 1, 2, 3, 4, etc. Ces colonnes contiennent les quatre dernières décimales des logarithmes des nombres terminés par les chiffres qui sont en tête de ces colonnes. Ainsi la colonne marquée 0 contient les quatre dernières décimales des logarithmes des nombres compris entre 10200 et 108000 qui sont terminés par un zéro, et en outre les nombres isolés dont nous avons parlé, et qui sont aussi censés placés à la gauche des chiffres que contiennent les autres colonnes. La colonne marquée 1 contient les quatre derniers chiffres des logarithmes de tous les nombres terminés par 1; la colonne marquée 2, ceux de tous les nombres terminés par 2; la colonne marquée 3, ceux de tous les nombres terminés par 3; et ainsi de suite jusqu'à neuf. On a par ce moyen une table à double entrée, dans laquelle on consulte d'abord la première colonne marquée N; et lorsqu'on y a trouvé les quatre premières figures du nombre

Digitized by Google

dont on veut avoir le logarithme, on suit de l'œil la ligne sur laquelle ils se trouvent, jusqu'à ce qu'on soit arrivé à la colonne au haut de laquelle se trouve le dernier chiffre du nombre donné; alors on a sous les yeux les quatre derniers chiffres du logarithme cherché. Quant aux trois premiers, ils sont exprimés par le nombre isolé qui se trouve dans la quatrième colonne, le plus prochain en montant.

La dernière colonne contient les différences de deux logarithmes consécutifs et les parties de ces différences, c'est-à-dire les produits de ces mêmes différences multipliées par $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, etc., jusqu'à $\frac{9}{10}$. Ces produits forment autant de petites tables qu'il y a de différences. Chacune de ces petites tables se trouve placée immédiatement au-dessous de la différence dont elle indique les parties. On verra plus loin quel est leur usage.

Mais, comme vers le commencement des tables ces différences se trouvent trop nombreuses, et par conséquent trop près les unes des autres, elles n'auraient pas permis, si elles n'eussent occupé qu'une colonne, de placer les petites tables des parties dans l'intervalle qui se serait trouvé entre elles. C'est pourquoi on les a disposées d'abord sur deux colonnes, la première de ces différences occupe la première colonne; les deux suivantes, sans sortir de la ligne horizontale où elles doivent être placées, sont repoussées à droite et occupent la seconde colonne; les deux différences qui suivent se trouvent sur la première colonne et les deux suivantes sur la seconde : ainsi de suite. Dans les quatre premières pages, on n'a placé les tables des parties de ces différences que de deux en deux.

Pour rendre ces explications plus claires, nous reproduisons ici l'une des pages de la table de Callet :

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	DIF.
7680	885.3612	3669	3725	3782	3838	3895	3951	4008	4065	4121	57
81	4178	4234	4291	4347	4404	4460	4517	4573	4630	4686	1 6
82	4743	4800	4856	4913	4969	5026	5082	5139	5195	5252	2 11
83	5308	5365	5421	5478	5534	5591	5647	5704	5761	5817	3 17
84	5874	5930	5987	6043	6100	6156	6213	6269	6326	6382	4 23
7685	6439	6495	6552	6608	6665	6721	6778	6834	6891	6947	5 29
86	7004	7060	7117	7173	7230	7286	7343	7399	7456	7512	6 34
87	7569	7625	7682	7738	7795	7851	7908	7964	8021	8077	7 40
88	8134	8190	8247	8303	8360	8416	8473	8529	8586	8642	8 46
89	8699	8755	8812	8868	8925	8981	9037	9094	9150	9207	9 51
7690	9263	9320	9376	9433	9489	9546	9602	9659	9715	9772	
91	9828	9885	9941	9998	0054	0110	0167	0223	0280	0336	
	886.										
92	0393	0449	0506	0562	0619	0675	0732	0788	0844	0901	
93	0957	1014	1070	1127	1183	1240	1296	1352	1409	1465	
94	1522	1578	1635	1691	1748	1804	1860	1917	1973	2030	
7695	2086	2143	2199	2256	2312	2368	2425	2481	2538	2594	
96	2651	2707	2763	2820	2876	2933	2989	3046	3102	3158	
97	3215	3271	3328	3384	3441	3497	3553	3610	3666	3723	
98	3779	3835	3892	3948	4005	4061	4118	4174	4230	4287	
99	4343	4400	4456	4512	4569	4625	4682	4738	4794	4851	
7700	4907	4964	5020	5076	5133	5189	5246	5302	5358	5415	
01	5471	5528	5584	5640	5697	5753	5810	5866	5922	5979	
02	6035	6092	6148	6204	6261	6317	6373	6430	6486	6543	
03	6599	6655	6712	6768	6824	6881	6937	6994	7050	7106	
04	7163	7219	7275	7332	7388	7445	7501	7557	7614	7670	
7705	7726	7783	7839	7896	7952	8008	8065	8121	8177	8234	
06	8290	8346	8403	8459	8515	8572	8628	8685	8741	8797	
07	8854	8910	8966	9023	9079	9135	9192	9248	9304	9361	
08	9417	9473	9530	9586	9642	9699	9755	9811	9868	9924	
09	9980	0037	0093	0149	0206	0262	0318	0375	0431	0487	
	887.										
7710	0544	0600	0656	0713	0769	0825	0882	0938	0994	1051	
11	1107	1163	1220	1276	1332	1389	1445	1501	1558	1614	
12	1670	1727	1783	1839	1895	1952	2008	2064	2121	2177	
13	2233	2290	2346	2402	2459	2515	2571	2627	2684	2740	
14	2796	2853	2909	2965	3022	3078	3134	3190	3247	3303	
7715	3359	3416	3472	3528	3584	3641	3697	3753	3810	3866	
16	3922	3978	4035	4091	4147	4204	4260	4316	4372	4429	
17	4485	4541	4598	4654	4710	4766	4823	4879	4935	4991	
18	5048	5104	5160	5217	5273	5329	5385	5442	5498	5554	
19	5610	5667	5723	5779	5835	5892	5948	6004	6060	6117	
7720	6173	6229	6286	6342	6398	6454	6511	6567	6623	6679	
21	6736	6792	6848	6904	6961	7017	7073	7129	7185	7242	
22	7298	7354	7410	7467	7523	7579	7635	7692	7748	7804	
23	7860	7917	7973	8029	8085	8142	8198	8254	8310	8366	
24	8423	8479	8535	8591	8648	8704	8760	8816	8872	8929	
7725	8985	9041	9097	9154	9210	9266	9322	9378	9435	9491	
26	9547	9603	9659	9716	9772	9828	9884	9941	9997	0053	
	888.										
27	0109	0165	0222	0278	0334	0390	0446	0503	0559	0615	
28	0671	0727	0784	0840	0896	0952	1008	1064	1121	1177	
29	1233	1289	1345	1402	1458	1514	1570	1626	1683	1739	
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

Digitized by Google

On voit dans la table, à gauche de la colonne N, deux autres colonnes, que nous n'avons pas reproduites parce qu'elles n'ont aucun rapport avec la théorie des logarithmes.

Usage des tables de logarithmes.

251. PROBLÈME I. *Un nombre quelconque étant donné, trouver son logarithme par le moyen des tables.*

Quelle que soit la place qu'occupe dans la suite décimale le premier chiffre significatif d'un nombre, on le considérera d'abord comme s'il était entier, sauf à donner ensuite à son logarithme une caractéristique convenable.

1er CAS. Si le nombre donné est moindre que 1200, on le trouvera dans la première chiliade, parmi les nombres naturels qui sont dans quelques-unes des colonnes marquées N. Le nombre qu'on trouvera à sa droite, sur la même ligne et dans la colonne suivante, intitulée Log., sera son logarithme, après qu'on y aura joint la caractéristique qui convient à ce logarithme, laquelle est toujours égale à 1, 2, 3, 4, etc., selon que le premier chiffre significatif du nombre exprime des unités simples, des dizaines, des centaines ou des mille, etc.

2e CAS. Si le nombre donné est compris entre 1020 et 10800, on le cherchera dans la table qui vient après la chiliade I, et l'ayant trouvé dans la colonne intitulée N, on consultera la colonne suivante marquée 0. Si l'on y voit sept chiffres de front dans l'alignement du nombre naturel, on aura tout d'un coup la partie décimale du logarithme cherché; mais si l'on n'y trouve que quatre figures, elles donneront les quatre derniers chiffres de la même partie décimale; ensuite on remarquera qu'il règne à leur gauche une marge ou espace blanc; on suivra cette marge en montant, et le premier nombre de trois chiffres qu'on y rencontrera, exprimera les trois premières figures de la fraction décimale du logarithme cherché. Écrivant donc ce nombre vers la gauche des quatre chiffres qu'on a déjà trouvés, on aura un nombre de sept chiffres comme ci-dessus : enfin on y joindra une caractéristique convenable. Par exemple, à côté de 7680, je trouve 8853612 sur la même ligne et dans la colonne marquée 0; j'ai donc tout d'un coup la partie décimale du logarithme que je cherche; il ne me reste plus qu'à y joindre la

Digitized by Google

caractéristique 3. Si le nombre était 7,680, la caractéristique serait zéro; elle serait 1, si le nombre était 76,80; 2, s'il était 768,0. A coté de 7695, dans la colonne marquée 0, je ne trouve que 2086; mais en suivant la marge, le premier nombre que je rencontre en montant est 886; mon logarithme est donc 3,8862086. Le nombre ayant cinq figures, s'il était moindre que 10800, on trouverait de même son logarithme.

3e Cas. Si le nombre est compris entre 10200 et 108000, c'est-à-dire s'il a cinq chiffres significatifs, on fera pour un instant abstraction du dernier, et l'on cherchera comme ci-dessus le nombre qu'expriment les quatre premiers. On suivra de l'œil la ligne sur laquelle on l'aura trouvé, en la parcourant de gauche à droite jusqu'à ce qu'on soit dans la colonne en haut de laquelle est écrit le cinquième chiffre dont on a fait abstraction. Les quatre figures qui sont tout à la fois dans l'alignement des quatre premiers chiffres du nombre donné, et dans la colonne qui répond au cinquième, exprimeront les quatre dernières décimales du logarithme de ce nombre. Quant aux trois premières, on les trouvera comme ci-dessus en remontant le long de la marge de la colonne intitulée 0. Soit, par exemple, 772,37 dont on veut le logarithme, je cherche 7723 dans la colonne N, je ne vois rien dans son alignement à la marge de la colonne 0; mais un peu plus haut, je rencontre 887 dans cette marge; je parcours la ligne du nombre 7723, et je m'arrête à la colonne marquée 7, sur laquelle et dans l'alignement de 7723, je trouve 8254. La partie décimale de mon logarithme est donc 0,8878254 et ce logarithme est 2,8878254. Si le nombre était compris entre 102000 et 108000, on trouverait de même son logarithme.

252. Les explications très-détaillées qui précèdent donnent le moyen de trouver le logarithme d'un nombre entier moindre que 108000 et celui d'un nombre décimal, dont les chiffres, abstraction faite de la virgule, expriment un nombre inférieur à cette limite. Pour trouver le logarithme des nombres plus grands, on remarque qu'en les divisant par une puissance convenable de 10, on pourra toujours les réduire à être compris dans les limites de la table; or, une pareille division diminue le logarithme d'un nombre entier d'unités, et ne change pas, par conséquent, sa partie décimale. Le problème se réduit donc

à trouver le logarithme d'un nombre qui n'est pas entier, inférieur à 108000. Pour cela, on admet que, dans des limites peu éloignées, l'accroissement des logarithmes est proportionnel à celui des nombres. Soit donc un nombre 76807,753, on dira :

le logarithme de 76807 est 4,8854008;

celui de 76808 est 4,8854065;

leur différence indiquée dans la table est 57 (unités décimales du septième ordre); par conséquent, le nombre augmentant d'une unité, son logarithme augmente de 57; s'il augmente de 0,753, son logarithme augmentera donc d'une quantité x, déterminée par la proportion

$$1 : 0,753 :: 57 : x;$$

d'où

$$x = 57 \times 0,753.$$

Dans la multiplication de 57 par 0,753, il ne faudra prendre que la partie entière du produit, car la partie décimale exprimerait au plus des dixièmes d'unité du septième ordre, c'est-à-dire des unités du huitième ordre, que l'on néglige dans la valeur des logarithmes.

Pour multiplier 57 par 0,753, on le multipliera successivement par 7, 5 et 3; ces produits se trouvent tout calculés dans le tableau placé au-dessous de 57, dernière colonne à droite de la table. Ils sont réduits aux chiffres que l'on doit conserver, en supposant que le multiplicateur exprime des dixièmes. Ainsi, vis-à-vis de 7, on trouve 40, au lieu de 39,9, qui serait le produit exact; vis-à-vis de 5, 29 au lieu de 28,5; vis-à-vis de 3, 17 au lieu de 17,1. Dans le cas actuel, 5 exprimant des centièmes, le produit correspondant sera 2,9, auquel on substituera 3; 3 exprimant des millièmes, le produit correspondant devra être divisé par 100 : il exprimera alors 0,17, et on le négligera.

La valeur de x, $57 \times 0,753$, sera, d'après cela, 43, et pour avoir le logarithme demandé, il faut ajouter au logarithme de 76807, 43 unités du septième ordre, ce qui fera 4,8854051.

Si l'on voulait le logarithme de 76807753, il serait évidemment 7,8854051. En général, pourvu que l'on conserve les mêmes chiffres, à quelque place que l'on mette la virgule, la partie décimale du logarithme reste la même.

253. Problème II. *Un logarithme étant donné, trouver, par le moyen des tables, le nombre auquel il appartient.*

1er Cas. Si le logarithme se trouve parmi quelqu'un de ceux de la première chiliade, on aura sur-le-champ le nombre qui lui correspond : ce nombre sera dans la colonne marquée N qui précède immédiatement celle qui contient le logarithme donné, et dans l'alignement de ce logarithme.

2e Cas. Si le logarithme ne se trouve pas dans la première table, on cherchera les trois premières décimales de ce logarithme parmi les nombres isolés que l'on voit dans la colonne marquée 0 de la seconde table; et les ayant trouvées, on cherchera les quatre dernières figures du logarithme parmi les nombres de quatre chiffres qui sont dans cette même colonne, en descendant. Si l'on y trouve ces quatre dernières figures, on verra le nombre cherché dans la colonne marquée N et sur leur alignement.

3e Cas. Si l'on ne trouve pas dans la colonne marquée 0 les quatre dernières figures du logarithme donné, on s'arrêtera à celles qui en approchent le plus *en moins*; on suivra la ligne sur laquelle on se sera arrêté, en la parcourant de gauche à droite; et si l'on trouve dans cette ligne les quatre dernières figures du logarithme donné, on suivra en montant ou en descendant la colonne dans laquelle on les aura trouvées; le chiffre qu'on verra à la tête ou au pied de cette colonne, sera la cinquième figure du nombre cherché, dont les quatres premières se trouveront, comme ci-dessus, dans la colonne marquée N.

Veut-on savoir, par exemple, à quel nombre appartient le logarithme qui a pour partie décimale 8871276, je cherche 887 parmi les nombres isolés de la colonne marquée 0; je parcours en descendant la même colonne, et je trouve que 1107 approche le plus *en moins* de 1276; je suis la ligne qui commence par 1107, et je trouve 1276 sur cette ligne; je monte dans la colonne qui contient 1276, je trouve le chiffre 3 à la tête de cette colonne; je reviens à 1276, et je vois que la ligne où il se trouve répond au nombre 7711; j'écris ce nombre, et à sa droite le chiffre 3 que j'ai déjà trouvé : ce qui me donne 77113. C'est le nombre qu'il fallait trouver.

4e Cas. Le logarithme donné ne se trouvant dans aucun des cas précédents, pour avoir le nombre auquel il appartient, on cherchera, comme ci-dessus, le logarithme qui en approche le

plus *en moins*. On cherchera le nombre entier correspondant; ce nombre et le suivant comprendront le nombre cherché, et l'on cherchera la différence avec un de ces nombres entiers, à l'aide de la proportion admise (**252**).

Exemple. Soit à chercher le nombre dont le logarithme a pour partie décimale 8870279. On trouvera, comme il a été dit, que ce logarithme est compris entre 8870262 et 8870318, qui répondent aux nombres 77095 et 77096 : la différence de ces deux logarithmes est 57 unités du dernier ordre, et le logarithme donné surpasse le plus petit des deux de 17 unités du même ordre; on dira donc : à une différence 57 entre les logarithmes correspond une différence 1 entre les nombres; donc à une différence 17 doit correspondre entre les nombres une différence x déterminée par la proportion

$$57 : 17 :: 1 : x;$$

d'où l'on conclut $x = \frac{17}{57}$, et, par suite, le nombre cherché est $77095 + \frac{17}{57}$ ou, en réduisant en décimales, 77095,29.

Remarque I. Si l'on retranche l'un de l'autre les deux logarithmes consécutifs 8870262 et 8870318, on trouve pour différence 56 et non 57. Il faut adopter néanmoins la différence 57 donnée par Callet, qui, à cause des chiffres décimaux non écrits dans la table, est plus près de la véritable que 56.

254. Remarque II. Nous ne pouvons pas indiquer ici la limite de l'erreur que l'on peut commettre, en supposant l'accroissement des logarithmes proportionnel à celui des nombres. Nous ferons observer seulement que l'inspection des tables montre que cette proportionnalité est à peu près exacte dans des limites assez écartées. La différence de deux logarithmes consécutifs varie, en effet, très-lentement, et au degré d'approximation que donnent les tables, elle reste souvent constante pendant plusieurs pages : il en résulte évidemment que, pour les nombres entiers compris dans ces pages, l'accroissement des logarithmes est proportionnel à celui des nombres.

Digitized by Google

Logarithmes négatifs.

255. Les logarithmes des nombres plus petits que l'unité sont négatifs ; pour les calculer, on se servira de la formule

$$\log\frac{a}{b} = \log a - \log b,$$

quelquefois on trouve commode de les mettre sous une forme telle que leur caractéristique seule soit négative. Il sufit d'ajouter à $\log a$ assez d'unités pour que la soustraction puisse se faire et de donner ensuite au reste pour caractéristique ce nombre d'unités pris négativement.

Soit, par exemple, à calculer $\log\frac{3}{47}$, on a

$$\log\frac{3}{47} = \log 3 - \log 47 = 0,47712125 - 1,67209786,$$

équation que l'on peut écrire

$$\log\frac{3}{47} = 2,47712125 - 1,67209786 - 2 = 0,80502339 - 2,$$

résultat que l'on écrit souvent de la manière suivante :

$$\log\frac{3}{47} = \bar{2},80502339;$$

le signe — placé au-dessus de la caractéristique 2, indiquant qu'il ne porte que sur elle seule.

Applications des logarithmes.

256. Quand un nombre inconnu résulte de multiplications, divisions, extractions de racines ou d'élévations aux puissances, pour déterminer sa valeur on cherche celle de son logarithme, qui résulte d'opérations beaucoup plus simples. Le logarithme étant connu, le nombre se détermine, comme il a été dit (**251**).

Digitized by Google

Exemple. Faire le produit des nombres 0,002356, 47,2985, 0,32986, 42,7579, 0,00004965, on trouvera

	log 0,002356	=	$\bar{3}$,3721753
	log 47,2980	=	1,6748428
Partie proportionnelle pour le chiffre	5	=	47
	log 0,32986	=	$\bar{1}$,5183297
	log 42,7570	=	1,6310072
Partie proportionnelle pour le chiffre	9	=	91
	log 0,00004965	=	$\bar{5}$,6959193
et en ajoutant, le logarithme cherché du produit est	$\log x$	=	$\bar{5}$,18922881

la partie décimale de ce logarithme est comprise entre le logarithme de 78034 et celui de 78035, en appliquant la méthode indiquée (255), on verra que $\log x$ a la même partie décimale que 78358, et, comme la caractéristique du logarithme est -5,

$$x = 0,0000780348.$$

Emploi des compléments.

257. On nomme complément d'un logarithme ce qu'il faut ajouter à ce logarithme pour faire 10. Il est évident, d'après cette définition, que lorsqu'on a un logarithme à soustraire, on peut, au lieu de cela, ajouter son complément et retrancher 10 du résultat; en opérant de cette manière, les soustractions sont remplacées par des additions.

Pour trouver le complément d'un logarithme, il faut retrancher chaque chiffre de 9, sauf le dernier chiffre à droite qui doit être retranché de 10.

Exemple. Le complément de

3,7821457

est 6,2178543,

lorsqu'on a l'habitude du calcul, le complément d'un logarithme n'est pas plus long à écrire que le logarithme lui-même.

APPLICATION. *Trouver le rayon d'une sphère ayant pour volume* $0^{m.c.},250$.

On trouvera, d'après les théorèmes connus de géométrie,

$$x = \sqrt[3]{\frac{0,250 \times 3}{4\pi}},$$

$$\log x = \tfrac{1}{3}(\log 0,250 + \log 3 + \text{compl.} \log 4 + \text{compl.} \log \pi - 20);$$

or, on a

$$\log 0,250 = \bar{1},3979400$$
$$\log 3 = 0,4771212$$
$$\text{compl.} \log 4 = 9,3979400$$
$$\text{compl.} \log \pi = 9,5028501$$

et l'on trouvera $\log x = \tfrac{1}{3}(\bar{2},7758513)$,

pour diviser ce résultat par 3, on rendra la caractéristique divisible par 3, en écrivant

$$\log x = \tfrac{1}{3}(\bar{3} + 1,7758513),$$

et, en effectuant $\log x = \bar{1},5919504$,

et l'on trouvera, par la méthode indiquée (**251**),

$$x = 0^{m},390796.$$

RÉSUMÉ.

230. Ce que l'on entend par équation exponentielle; définition de a^x quand x est commensurable. — **231**. Les puissances d'un nombre positif sont positives. — **232**. Les puissances positives d'un nombre plus grand que l'unité sont plus grandes que l'unité, et ses puissances négatives sont moindres que l'unité; le contraire a lieu pour les nombres moindres que l'unité. — **233**. Si x augmente, a^x varie toujours dans le même sens, en augmentant si a est plus grand que l'unité, et diminuant dans le cas contraire. — **234**. On peut attribuer à x des valeurs assez rapprochées pour que a^x varie aussi peu qu'on le voudra. — **235**. Définition de a^x quand x est incommensurable. — **236**. a^x passe par toutes les valeurs positives quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$. — **237**. Résolution de l'équation $a^x = b$ quand a et b sont positifs. — **238**. Réduction des autres cas au précédent. — **239**. Définition des logarithmes. — **240**. Logarithme d'un produit. — **241**. Logarithme d'un quotient. — **242**. Logarithme d'une puissance. — **243**. Le logarithme de l'unité est zéro et

Digitized by Google

celui de la base est l'unité. — **244**. Nombres dont les logarithmes sont négatifs. — **245**. Pour passer d'une base à une autre, il faut multiplier tous les logarithmes par un facteur constant. — **246**. Identité des logarithmes algébriques et arithmétiques. — **247**. Les logarithmes définis par deux progressions satisfont à la définition donnée dans ce chapitre. — **248**. Il existe, pour le calcul des tables de logarithmes, des procédés abrégés que l'on ne peut indiquer. — **249**. Définition de la caractéristique; elle ne se trouve pas dans les tables. — **250**. Description des tables de Callet. — **251**. Un nombre étant donné, trouver son logarithme. — **252**. Cas où le nombre sort de la limite des tables. — **253**. Un logarithme étant donné, trouver le nombre correspondant. — **254**. L'inspection des tables prouve que la proportion admise s'écarte peu de la vérité. — **255**. Logarithmes à caractéristique négative. — **256**. Application des logarithmes. — **257**. Emploi des compléments.

EXERCICES.

I. Résoudre les équations

$$x^y = y^x,$$
$$x^p = y^q.$$

II. Résoudre l'équation

$$3^{2x}5^{3x-4} = 7^{x-1}11^{2-x}.$$

III. Résoudre l'équation

$$(a^4 - 2a^2b^2 + b^4)^{x-1} = \frac{(a-b)^{2x}}{(a+b)^2}.$$

IV. Résoudre l'équation

$$5^{x+1} + 5^{x-2} - 5^{x-3} + 5^{x-4} = 4739.$$

V. Résoudre l'équation

$$3^{x^2-4x+5} = 1200.$$

Digitized by Google

CHAPITRE XXI.

SUR LES EXPRESSIONS QUI SE PRÉSENTENT SOUS UNE FORME INDÉTERMINÉE.

258. Lorsque les deux termes d'une fraction s'annulent, en même temps, pour certaines valeurs des lettres qu'ils renferment, l'opération indiquée n'a plus aucun sens. On est quelquefois conduit à des expressions de cette forme, en cherchant à résoudre un problème indéterminé (**66**). Quelquefois aussi, la fraction ne prend cette forme indéterminée qu'à cause d'un facteur commun égal à zéro, par lequel on a multiplié ses deux termes, ou les deux membres de l'une des équations qui y ont conduit. Nous en avons vu un exemple (**91**). Dans chaque cas, il convient d'examiner avec soin l'origine de l'expression proposée, pour voir si les raisonnements qui y conduisent se trouvent en défaut, soit pour l'une des causes indiquées plus haut, soit à cause d'une circonstance analogue. S'il n'en est pas ainsi, et que l'on ait prouvé, en toute rigueur, que le problème proposé sera résolu si l'on a

$$Ax = B,$$

ou (ce qui revient au même, à moins que A ne soit nul)

$$x = \frac{B}{A},$$

il est évident qu'une hypothèse qui annulera A et B, permettra de prendre x arbitrairement, puisque l'on a évidemment, quel que soit x,

$$0 \times x = 0.$$

259. Dans le cas même où les raisonnements qui y ont conduit se trouvent en défaut, on peut souvent se servir d'une

expression qui prend la forme $\frac{0}{0}$ pour trouver la véritable valeur de l'inconnue qu'elle représente. Remarquons, en effet, que cette expression étant applicable tant qu'elle n'a pas pris la forme $\frac{0}{0}$, fournit la solution du problème pour des hypothèses aussi peu différentes qu'on le voudra de celle qui donne lieu à difficulté. Si donc la question est de telle nature qu'un très-petit changement dans les données en doive apporter un très-petit dans le résultat, lorsque les deux termes de la fraction tendent vers zéro, leur rapport différera de moins en moins de la valeur que nous cherchons, laquelle sera, par conséquent, sa *limite*. Cette limite se nomme souvent la vraie valeur de la fraction qui devient $\frac{0}{0}$.

260. Pour trouver la vraie valeur d'une expression qui, pour certaine hypothèse, se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, il faut la transformer en une autre qui lui soit égale et ne donne pas lieu à la même difficulté. Nous donnerons à ce sujet quelques règles relatives au cas où l'expression considérée devient $\frac{0}{0}$, par suite d'une valeur particulière attribuée à *une seule* des lettres qui y entrent.

261. *Cas où l'expression considérée est le quotient de deux polynomes entiers.*

Soit la fraction

$$F=\frac{x^n+B_1x^{n-1}+\ldots+B_{n-1}x+B_n}{x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_{m-1}x+A_m},$$

qui, pour $x=a$, prend la forme $\frac{0}{0}$. Le numérateur et le dénominateur s'annulant par $x=a$, sont (**133**) l'un et l'autre divisibles par $x-a$. Si l'on supprime ce facteur commun, la fraction F prendra la forme

$$F=\frac{x^{n-1}+A_1'x^{n-2}+\ldots+A'_{n-1}}{x^{m-1}+B_1'x+\ldots+B'_{m-1}}.$$

Si les deux termes ne s'annulent plus pour $x=a$, on n'aura qu'à y substituer cette valeur de x, et l'on obtiendra ainsi la vraie valeur de F. S'ils s'annulent encore, on les divisera de nouveau par $x-a$, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on rencontre une fraction qui ne présente plus la même singularité. Il est clair qu'on en trouvera toujours une, car à chaque

Digitized by Google

fois que l'on divise par $x-a$ les deux termes de la fraction proposée, leur degré diminue d'une unité, et l'on finirait, si l'opération ne s'arrêtait pas, par obtenir pour l'un d'eux un quotient numérique.

Applications. Chercher la véritable valeur de

$$F=\frac{x^4+ax^3-3a^2x^2-a^3x+2a^4}{x^4-ax^3-13a^2x^2+25a^3x-12a^4}$$

pour $x=a$.

La fraction proposée devient, si l'on divise les deux termes par $x-a$,

$$\frac{x^3+2ax^2-a^2x-2a^3}{x^3-13a^2x+12a^3}.$$

Cette nouvelle fraction, pour $x=a$, se présente encore sous la forme $\frac{0}{0}$. Mais si l'on divise les deux termes par $x-a$, elle devient

$$\frac{x^2+3ax+2a^2}{x^2+ax-12a^2},$$

qui, pour $x=a$, prend la valeur $-\frac{6}{10}$ ou $-\frac{3}{5}$. On a donc

$$F=-\tfrac{3}{5}.$$

262. *Cas des expressions irrationnelles.*

Nous nous bornerons, comme précédemment, au cas où elles prennent une forme indéterminée, par suite d'une valeur attribuée à une seule lettre.

Nous examinerons, en premier lieu, l'expression de la forme

$$F=\frac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}}{x-a},$$

qui, évidemment, devient $\frac{0}{0}$, pour $x=a$. Car, à celle-là, on peut, sauf quelques exceptions, ramener toutes les autres. Si l'on pose $\sqrt[m]{x}=x'$, $\sqrt[m]{a}=a'$, et, par suite, $x=x'^m$, $a=a'^m$, l'expression F devient

$$\frac{x'-a'}{x'^m-a'^m},$$

ou, en divisant les deux termes par $x'-a'$,

$$\frac{1}{x'^{m-1}+x'^{m-2}a'+x'^{m-3}a'^2+\ldots+a'^{m-1}},$$

ce qui, pour $x'=a'$, devient

$$\frac{1}{m\,a'^{m-1}},$$

c'est-à-dire
$$\frac{1}{m\sqrt[m]{a^{m-1}}}.$$

263. Considérons maintenant une expression renfermant un nombre quelconque de radicaux, et prenant la valeur $\frac{0}{0}$ pour une certaine valeur attribuée à l'une des lettres qu'elle renferme. Soit

$$[1] \qquad F=\frac{P+\sqrt[m]{Q}+\sqrt[n]{R}-\sqrt[p]{S}}{P'+\sqrt[m']{Q'}+\sqrt[n']{R'}-\sqrt[p']{S'}-\sqrt[q']{T'}}$$

P, Q, R, S, P′, Q′, R′, S′, T′ étant des polynomes entiers par rapport à x, et $x=a$ la valeur de x pour laquelle F devient $\frac{0}{0}$; en sorte que l'on ait, en désignant par P_a, Q_a, R_a, S_a, P_a', Q_a', R_a', S_a', T'_a les valeurs de ces divers polynomes, quand on y fait $x=a$,

$$[2] \qquad P_a+\sqrt[m]{Q_a}+\sqrt[n]{R_a}-\sqrt[p]{S_a}=0,$$

$$[3] \qquad P'_a+\sqrt[m']{Q'_a}+\sqrt[n']{R'_a}-\sqrt[p']{S'_a}-\sqrt[q']{T'_a}=0.$$

On peut écrire la valeur de F sous la forme

$$[4] \quad F=\frac{(P-P_a)+(\sqrt[m]{Q}-\sqrt[m]{Q_a})+(\sqrt[n]{R}-\sqrt[n]{R_a})-(\sqrt[p]{S}-\sqrt[p]{S_a})}{P'-P'_a+(\sqrt[m']{Q'}-\sqrt[m']{Q'_a})+(\sqrt[n']{R'}-\sqrt[n']{R'_a})-(\sqrt[p']{S'}-\sqrt[p']{S'_a})-(\sqrt[q']{T'}-\sqrt[q']{T'_a})};$$

car il suffit pour cela de retrancher de ses deux termes les premiers membres des équations [2] et [3] qui sont, l'un et l'autre, égaux à zéro.

Si, maintenant, nous divisons par $x-a$ les deux termes de F, il viendra

$$[5] \quad F=\frac{\frac{P-P_a}{x-a}+\frac{\sqrt[m]{Q}-\sqrt[m]{Q_a}}{x-a}+\frac{\sqrt[n]{R}-\sqrt[n]{R_a}}{x-a}-\frac{\sqrt[p]{S}-\sqrt[p]{S_a}}{x-a}}{\frac{P'-P'_a}{x-a}+\frac{\sqrt[m']{Q'}-\sqrt[m']{Q'_a}}{x-a}+\frac{\sqrt[n']{R'}-\sqrt[n']{R'_a}}{x-a}-\frac{\sqrt[p']{S'}-\sqrt[p']{S'_a}}{x-a}-\frac{\sqrt[q']{T'}-\sqrt[q']{T'_a}}{x-a}},$$

Digitized by Google

et, pour trouver la vraie valeur de F, il suffit de trouver celle des fractions, $\frac{P-P_a}{x-a}$, $\frac{\sqrt[m]{Q}-\sqrt[m]{Q_a}}{x-a}$, $\frac{\sqrt[n]{R}-\sqrt[n]{R_a}}{x-a}$, etc., qui se présentent toutes sous la forme $\frac{0}{0}$. La première fraction ne contenant pas de radicaux, sa vraie valeur s'obtiendra par la méthode indiquée (**259**), et il est évident qu'il suffira de diviser $P-P_a$ par $x-a$, et de faire $x=a$ dans le résultat. Toutes les autres fractions étant de même forme, il suffit de considérer l'une d'entre elles

$$\frac{\sqrt[m]{Q}-\sqrt[m]{Q_a}}{x-a},$$

on peut écrire cette expression de la manière suivante :

$$\frac{\sqrt[m]{Q}-\sqrt[m]{Q_a}}{Q-Q_a}\times\frac{Q-Q_a}{x-a};$$

or, les deux facteurs ont, l'un et l'autre, une limite que l'on peut calculer; en effet, lorsque x tend vers a, Q tend vers Q_a, et $\frac{\sqrt[m]{Q}-\sqrt[m]{Q_a}}{Q-Q_a}$ peut être assimilé à l'expression $\frac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}}{x-a}$ considérée (**260**); sa vraie valeur est, par conséquent,

$$\frac{1}{m\sqrt[m]{Q_a^{m-1}}}.$$

Quant à $\frac{Q-Q_a}{x-a}$, comme il n'y a pas de radicaux, on trouvera sa vraie valeur par la méthode exposée (**259**).

Exemple. Trouver, pour $x=1$, la vraie valeur de la fraction

$$[1]\quad F=\frac{\sqrt[3]{2x+6}-\sqrt[2]{x+1}+\sqrt[4]{5x-1}-\sqrt[5]{20x+12}}{x^2+1+\sqrt[2]{3x+1}-\sqrt[3]{63x+1}},$$

il est facile de s'assurer que cette fraction devient, en effet, $\frac{0}{0}$, car pour $x=1$, le numérateur devient

$$\sqrt[3]{8}-\sqrt[2]{2}+\sqrt[4]{4}-\sqrt[5]{32},$$

et l'on a

$$\sqrt[3]{8}-\sqrt[5]{32}=2-2=0,$$

$$-\sqrt[2]{2}+\sqrt[4]{4}=0;$$

le dénominateur devient, pour la même valeur de x,

$$2+\sqrt[2]{4}-\sqrt[3]{64}=2+2-4=0;$$

pour opérer conformément à la méthode indiquée, nous mettrons la fraction F sous la forme

$$[2]\quad \frac{(\sqrt[3]{2x+6}-\sqrt[3]{8})-(\sqrt[2]{x+1}-\sqrt[2]{2})+(\sqrt[4]{5x-1}-\sqrt[4]{4})-(\sqrt[5]{20x+12}-\sqrt[5]{32})}{x^2+1-2+(\sqrt[2]{3x+1}-\sqrt[2]{4})-(\sqrt[3]{63x+1}-\sqrt[3]{64})},$$

et, en divisant les deux termes par $x-1$,

$$[3]\quad \frac{\dfrac{\sqrt[3]{2x+6}-\sqrt[3]{8}}{x-1}-\dfrac{\sqrt[2]{x+1}-\sqrt[2]{2}}{x-1}+\dfrac{\sqrt[4]{5x-1}-\sqrt[4]{4}}{x-1}-\dfrac{\sqrt[5]{20x+12}-\sqrt[5]{32}}{x-1}}{\dfrac{x^2+1-2}{x-1}+\dfrac{\sqrt[2]{3x+1}-\sqrt[2]{4}}{x-1}-\dfrac{\sqrt[3]{63x+1}-\sqrt[3]{64}}{x-1}},$$

or, on a

$$[4]\quad \frac{\sqrt[3]{2x+6}-\sqrt[3]{8}}{x-1}=\left(\frac{\sqrt[3]{2x+6}-\sqrt[3]{8}}{2x+6-8}\right)\left(\frac{2x-2}{x-1}\right),$$

$$[5]\quad \frac{\sqrt[2]{x+1}-\sqrt[2]{2}}{x-1}=\frac{\sqrt[2]{x+1}-\sqrt[2]{2}}{x+1-2},$$

$$[6]\quad \frac{\sqrt[4]{5x-1}-\sqrt[4]{4}}{x-1}=\left(\frac{\sqrt[4]{5x-1}-\sqrt[4]{4}}{5x-1-4}\right)\left(\frac{5x-5}{x-1}\right),$$

$$[7]\quad \frac{\sqrt[5]{20x+12}-\sqrt[5]{32}}{x-1}=\left(\frac{\sqrt[5]{20x+12}-\sqrt[5]{32}}{20x+12-32}\right)\left(\frac{20x-20}{x-1}\right),$$

$$[8]\quad \frac{x^2+1-2}{x-1}=\frac{x^2-1}{x-1},$$

$$[9]\quad \frac{\sqrt[2]{3x+1}-\sqrt[2]{4}}{x-1}=\left(\frac{\sqrt[2]{3x+1}-\sqrt[2]{4}}{3x+1-4}\right)\left(\frac{3x-3}{x-1}\right),$$

$$[10]\quad \frac{\sqrt[3]{63x+1}-\sqrt[3]{64}}{x-1}=\left(\frac{\sqrt[3]{63x+1}-\sqrt[3]{64}}{63x+1-64}\right)\left(\frac{63x-63}{x-1}\right),$$

et, en appliquant les méthodes exposées plus haut, on trouve facilement que la vraie valeur des expressions [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10] est, pour $x=1$,

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{64}}2,\quad \frac{1}{2\sqrt[2]{2}},\quad \frac{1}{4\sqrt[4]{4^3}}5,\quad \frac{1}{5\sqrt[5]{(32)^4}}20,\quad 2,\quad \frac{1}{2\sqrt[2]{4}},\quad \frac{1}{3\sqrt[3]{(64)^2}}63,$$

en sorte que la vraie valeur de F est

$$\frac{\frac{2}{3\sqrt[3]{64}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{5}{4\sqrt[4]{4^3}}-\frac{20}{5\sqrt[5]{(32)^4}}}{2+\frac{1}{2\sqrt{4}}-\frac{63}{3\sqrt[3]{(64)^2}}}=\frac{\frac{1}{8\sqrt{2}}-\frac{1}{12}}{\frac{15}{16}}=\frac{\sqrt{2}-1\frac{1}{3}}{15}.$$

264. Remarque. Le seul cas d'exception que présente la méthode précédente est celui où, en additionnant les vraies valeurs des diverses fractions dans lesquelles on a décomposé le numérateur et le dénominateur de la fraction proposée, on retrouverait encore $\frac{0}{0}$. Si l'un des deux termes seulement devient nul, il n'y a pas difficulté; la fraction tend vers 0 lorsque c'est le numérateur qui s'annulle seul; lorsque c'est le dénominateur elle croît indéfiniment.

Sur les fractions qui prennent la forme $\frac{\infty}{\infty}$.

265. Lorsque les deux termes d'une fraction augmentent indéfiniment avec la valeur d'une lettre variable qu'ils renferment, il est quelquefois utile de déterminer la valeur limite de cette fraction. Pour y parvenir, on doit alors diviser les deux termes par une puissance tellement choisie de la lettre qui augmente indéfiniment, qu'aucun d'eux ne devienne infini, et que cependant ils ne tendent pas tous vers zéro; la limite devient alors évidente.

Exemple I. Limite de

$$\frac{x^5+3x^2-4x+1}{7x^5+x^4+x^3}$$

lorsque x augmente indéfiniment. En divisant par x^5 les deux termes de la fraction, elle devient

$$\frac{1+\frac{3}{x^3}-\frac{4}{x^4}+\frac{1}{x^5}}{7+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}};$$

et, quand x augmente indéfiniment, elle s'approche évidemment de la valeur $\frac{1}{7}$.

Digitized by Google

Exemple II. Limite de

$$\frac{\sqrt[3]{x^3+5x+1}+2x}{\sqrt[4]{5x^4+3x+1}+\sqrt[2]{x^2+1}}$$

lorsque x augmente indéfiniment. En divisant par x les deux termes de la fraction, elle devient

$$\frac{\sqrt[3]{1+\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}}+2}{\sqrt[4]{5+\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^4}}+\sqrt[2]{1+\frac{1}{x^2}}};$$

et quand x augmente indéfiniment, elle s'approche évidemment de

$$\frac{\sqrt[3]{1}+2}{\sqrt[4]{5}+\sqrt[2]{1}}=\frac{3}{1+\sqrt[4]{5}}.$$

266. Remarque I. S'il arrivait qu'après la division le numérateur eût pour limite 0, et le dénominateur une limite finie, la fraction proposée tendrait vers 0; dans le cas contraire, elle croîtrait indéfiniment.

Exemple. $$\frac{5x^2+7x+1}{x^3+2x+1}$$

tend vers 0 lorsque x augmente;

et $$\frac{\sqrt[3]{x^6+2x+7}}{x+1}$$

augmente indéfiniment. On s'en assure facilement en divisant par x^3 les deux termes de la première fraction, et par x ceux de la seconde.

267. Remarque II. Si l'on éprouvait quelque embarras à déterminer la puissance de x, par laquelle il convient de diviser les deux termes de la fraction, il faudrait diviser par une puissance indéterminée x^α, et fixer ensuite la valeur de α par la condition qu'aucun terme ne restât infini, et que tous ne devinssent pas nuls.

Exemple. Trouver la limite de

$$\frac{\sqrt[7]{x^3+4x^2+1}+\sqrt[3]{x^4+5x+1}}{\sqrt[6]{x^2+x+3}+\sqrt[6]{2x^8+3}}.$$

Divisons les deux termes par x^α : cette fraction deviendra

$$\frac{\sqrt[7]{x^{3-7\alpha}+4x^{2-7\alpha}+\frac{1}{x^{7\alpha}}}+\sqrt[3]{x^{4-3\alpha}+5x^{1-3\alpha}+\frac{1}{x^{3\alpha}}}}{\sqrt[5]{x^{2-5\alpha}+x^{1-5\alpha}+\frac{3}{x^{5\alpha}}}+\sqrt[6]{2x^{8-6\alpha}+\frac{3}{x^{6\alpha}}}}.$$

Pour que les conditions énoncées soient remplies, il faut qu'aucun exposant de x ne soit positif. On devra donc avoir*

$$3-7\alpha \leqq 0,\quad 2-5\alpha \leqq 0,$$
$$4-3\alpha \leqq 0,\quad 8-6\alpha \leqq 0;$$

d'où l'on conclut
$$\alpha \geqq \tfrac{3}{7},\quad \alpha \geqq \tfrac{2}{5},$$
$$\alpha \geqq \tfrac{4}{3},\quad \alpha \geqq \tfrac{8}{6} \geqq \tfrac{4}{3},$$

et la plus petite valeur de α, qui satisfasse à toutes ces conditions, est $\alpha = \frac{4}{3}$: c'est elle qu'il faut adopter; une valeur plus grande rendrait tous les termes nuls pour $x = \infty$. En faisant $\alpha = \frac{4}{3}$, et supprimant toutes les puissances négatives de x, qui deviennent nulles quand x augmente indéfiniment, on voit que la limite de la fraction proposée est

$$\frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[6]{2}} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}.$$

Expressions qui se présentent sous la forme $\infty - \infty$.

268. Nous considérerons seulement le cas où l'expression qui se présente sous la forme $\infty - \infty$ est la différence de deux radicaux du second degré, ou celle d'un radical de second degré et d'un polynome rationnel.

Soit la différence
$$\sqrt{P} - \sqrt{Q},$$

P et Q étant deux polynomes en x, qui deviennent, l'un et l'autre, infinis lorsque les valeurs attribuées à cette lettre aug-

* Les signes $\leqq$ $\geqq$ signifient plus petit ou égal, plus grand ou égal.

Digitized by Google

mentent indéfiniment. Multiplions et divisons cette différence par $\sqrt{P}+\sqrt{Q}$: elle prendra la forme

$$\frac{P-Q}{\sqrt{P}+\sqrt{Q}}.$$

Si le polynome $P-Q$ est indépendant de x, le dénominateur augmentant indéfiniment avec la valeur de cette lettre, la fraction augmente indéfiniment. Si $P-Q$ renferme x, il augmente aussi indéfiniment, et la question est ramenée à trouver la vraie valeur d'une fraction qui prend la forme $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemple. Trouver la vraie valeur de

$$\sqrt[2]{x^2-7x+1}-x,$$

lorsque x augmente indéfiniment.

La différence proposée équivaut à

$$\frac{x^2-7x+1-x^2}{\sqrt{x^2-7x+1}+x}=\frac{-7x+1}{x+\sqrt{x^2-7x+1}},$$

ou, en divisant les deux termes par x,

$$\frac{-7+\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}}},$$

ce qui, lorsque x augmente, tend évidemment vers

$$\frac{-7}{1+\sqrt{1}}=-\frac{7}{2}.$$

Sur les expressions qui contiennent plusieurs lettres variables.

269. Lorsqu'une expression prend la forme indéterminée pour plusieurs valeurs simultanées attribuées à des lettres qu'elle renferme, on doit, en général, la regarder comme complétement indéterminée. La limite vers laquelle elle tend lorsque les lettres s'approchent des valeurs qu'on veut leur attribuer, dépend alors de la loi qu'elles suivent pour s'en approcher.

Digitized by Google

Considérons, par exemple, l'expression

$$\frac{x+y-3}{xy-2},$$

qui, pour $x=1$, $y=2$, devient $\frac{0}{0}$. Posons $x=1+\alpha$, $y=2+\beta$; cette expression deviendra

$$\frac{\alpha+\beta}{2\alpha+\beta+\alpha\beta},$$

ou, en divisant haut et bas par β,

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}+1}{2\frac{\alpha}{\beta}+1+\alpha},$$

et, lorsque α et β tendent vers 0, on peut assigner à $\frac{\alpha}{\beta}$ une valeur arbitraire m, et cette expression aura évidemment pour limite

$$\frac{m+1}{2m+1},$$

ce qui, en choisissant m convenablement, peut prendre toutes les valeurs possibles.

Remarque. Une expression qui se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ est, *en général*, indéterminée, lorsqu'elle prend cette forme par suite des valeurs attribuées à plusieurs lettres; mais il y a des exceptions. Souvent, par exemple, une fraction qui se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, par suite d'un facteur commun à ses deux termes qui s'annule, n'offre plus aucune indétermination quand on a supprimé ce facteur.

Exemple. $$\frac{x^2+2xy+y^2-4}{x+y-2}$$

devient $\frac{0}{0}$ pour $x=1$, $y=1$. Mais si l'on remarque que le numérateur peut s'écrire

$$(x+y-2)(x+y+2),$$

le facteur $x+y-2$ peut être supprimé, et il reste $x+y+2$, qui, pour $x=1$, $y=1$, devient égal à 4.

Digitized by Google

RÉSUMÉ.

258. Lorsque les deux termes d'une fraction s'annulent pour certaines valeurs des lettres qu'elle renferme, l'opération n'a plus aucun sens. Si les raisonnements qui assignent à une inconnue une valeur égale à cette fraction ne sont pas en défaut, l'inconnue est indéterminée. — **259**. Lorsque les raisonnements qui ont conduit à une valeur $\frac{0}{0}$ sont en défaut, on peut souvent faire usage de l'expression trouvée en cherchant sa limite que l'on nomme sa vraie valeur. — **260**. Pour trouver cette limite, on transforme l'expression en une autre qui lui soit égale et ne donne pas lieu à la même difficulté. — **261**. Cas où l'expression est le quotient de deux polynomes entiers. — **262**. Cas des expressions irrationnelles. Limite de l'expression $\frac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}}{x-a}$ quand x tend vers a. — **263**. Cas général d'une fraction irrationnelle qui devient $\frac{0}{0}$ pour une valeur de la variable. — **264**. La méthode est en défaut dans un cas particulier. — **265**. Fraction dont les deux termes croissent indéfiniment avec une lettre variable qu'ils renferment. — **266**. Cas où la limite est nulle ou infinie. — **267**. Moyen de déterminer la puissance de la variable par laquelle on doit diviser les deux termes. — **268**. Différence de deux radicaux du second degré qui, l'un et l'autre, augmentent indéfiniment. — **269**. Sur les expressions qui deviennent $\frac{0}{0}$ pour des valeurs attribuées à deux lettres.

EXERCICES.

I. Si l'on a $A'=\sqrt{AB},\ B'=\frac{2AB}{A+A'}$,
trouver la limite du rapport

$$\frac{B'-A'}{B-A}$$

lorsque B tend vers A.

II. Trouver la limite de

$$\sqrt[3]{x^3+1}-x$$

lorsque x augmente indéfiniment.

III. Trouver pour $x=1$ la vraie valeur de

$$\frac{\sqrt[3]{x+\sqrt{43x+6}}-\sqrt[4]{x^2+1-\sqrt{195x+1}}}{\sqrt[3]{5x+3}-\sqrt[2]{x^2-x+4}}.$$

NOTES.

NOTE 1.

SUR LA THÉORIE DES INTÉRÊTS COMPOSÉS ET LES ANNUITÉS.

Intérêts composés.

270. Si le taux de l'intérêt est tel que 1 franc rapporte en un an un intérêt représenté par r, une somme quelconque A rapportera, dans le même temps, Ar, et deviendra par conséquent

$$A(1+r).$$

Si cette somme $A(1+r)$ est placée pendant une seconde année, elle deviendra évidemment

$$A(1+r)^2.$$

Cette nouvelle somme placée pendant une troisième année se multiplie encore par $(1+r)$, et deviendra

$$A(1+r)^3.$$

Et, en général, la somme placée se multipliant chaque année par $1+r$, deviendra, après n années,

$$A(1+r)^n.$$

Cette formule $A(1+r)^n$ peut s'appliquer, à l'aide de conventions convenables, au cas où n est fractionnaire ou négatif.

Digitized by Google

1° Si n est fractionnaire et représenté par $\frac{p}{q}$, supposons que l'on étende le principe des intérêts composés aux fractions d'année, et nommons x, ce que rapporte 1 franc pendant $\frac{1}{q}$ d'année.

1 franc rapportant x après $\frac{1}{q}$ d'année, devient, au bout de ce temps, $(1+x)$; et une somme quelconque placée pendant le même temps, se multipliera par $1+x$. Si donc on place 1 franc pendant $\frac{q}{q}$ d'année, c'est-à-dire pendant une année entière, il se multipliera q fois par $(1+x)$ ou par $(1+x)^q$; et comme d'ailleurs il doit devenir $1+r$, on a

$$(1+x)^q=(1+r);$$

d'où l'on déduit $$1+x=(1+r)^{\frac{1}{q}}.$$

Et il est évident que 1 franc placé pendant $\frac{p}{q}$ année se multipliera par $(1+x)^p$, c'est-à-dire par $(1+r)^{\frac{p}{q}}$; et que, par suite, une somme quelconque A deviendra

$$A(1+r)^{\frac{p}{q}};$$

ce qui est conforme au résultat énoncé.

2° Si r est négatif, nous envisagerons la question de la manière suivante :

Une somme qui vaut aujourd'hui A, est placée depuis un temps indéterminé; combien valait-elle il y a n années?

Si l'on désigne par X la valeur inconnue, X placé pendant n années a produit A; par suite, d'après ce qui précède,

$$A=X(1+r)^n;$$

d'où l'on déduit $$X=A(1+r)^{-n};$$

ce qui est encore conforme au résultat énoncé.

Des annuités.

271. Une annuité est une rente payable pendant un nombre limité d'années.

PROBLÈME. *Calculer la valeur actuelle d'une annuité de* a *francs payable pendant* n *années, le premier payement devant avoir lieu dans un an.*

a francs payables dans k années, valent aujourd'hui.

$$\frac{a}{(1+r)^k},$$

car la somme $\frac{a}{(1+r)^k}$ placée pendant k années, deviendrait, après ce temps

$$\frac{a}{(1+r)^k} \times (1+r)^k, \quad \text{c'est-à-dire } a.$$

D'après cela, on peut évaluer la valeur actuelle de chacun des payements dont se compose l'annuité. Le premier payement qui doit avoir lieu dans un an, vaut aujourd'hui

$$\frac{a}{(1+r)}.$$

Le second payement qui doit avoir lieu dans deux ans, vaut

$$\frac{a}{(1+r)^2}.$$

Le troisième payement vaut

$$\frac{a}{(1+r)^3},$$

et le n^{eme} $\frac{a}{(1+r)^n}.$

La valeur actuelle de tous ces payements est donc

$$A = \frac{a}{(1+r)} + \frac{a}{(1+r)^2} + \cdots \frac{a}{(1+r)^n},$$

Digitized by Google

c'est-à-dire, en appliquant la formule de sommation des progressions par quotient,

$$[1] \qquad A = \frac{\frac{a}{(1+r)} - \frac{a}{(1+r)^{n+1}}}{1 - \frac{1}{1+r}} = \frac{a - \frac{a}{(1+r)^n}}{r}.$$

La formule [1] renferme quatre lettres, A, a, r et n; on pourra se donner la valeur de trois d'entre elles et se proposer de déterminer la quatrième.

1° Si a, r, n sont donnés, la formule [1] fournit la valeur de A; le problème est toujours possible.

2° Si l'inconnue est a, on déduit de [1]

$$a = \frac{Ar}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}.$$

Le problème est encore possible dans tous les cas.

3° Si A, a et r étant donnés, l'inconnue est n, on trouve facilement

$$(1+r)^n = \frac{a}{a - Ar};$$

et, en prenant les logarithmes,

$$n = \frac{\log a - \log(a - Ar)}{\log(1+r)}.$$

Le problème n'est possible que si $a - Ar$ est positif, car les nombres négatifs n'ont pas de logarithmes; il faut de plus que la valeur du second nombre soit un nombre entier.

4° Si, enfin, r est l'inconnue, l'équation [1] ne peut pas être résolue par les méthodes indiquées dans cet ouvrage.

Digitized by Google

EXERCICES.

I. $A(1+r)^{\frac{p}{q}}$ qui exprime la valeur d'une somme A placée à intérêts composés pendant un temps $\frac{p}{q}$, est plus grande ou plus petite que la valeur $A\left(1+r\frac{p}{q}\right)$, que la même somme aurait acquise pendant le même temps à intérêts simples, suivant que $\frac{p}{q}$ est lui-même plus grand ou plus petit que l'unité.

II. On propose deux systèmes pour une construction; le premier exige une dépense D, des frais annuels de réparations représentés par R, et la durée de la construction est évaluée à n années; dans un autre système la dépense est D', les frais annuels de réparations R', et la durée n' années : quel système doit-on préférer?

III. Quand on cherche après combien d'années on peut acquitter une dette A par des payements annuels égaux à a, on trouve

$$n = \frac{\log a - \log(a - Ar)}{\log(1+r)}.$$

Si n n'est pas entier, peut-on déduire quelque chose de cette formule?

Digitized by Google

NOTE 2.

SUR LES FONCTIONS SYMÉTRIQUES.

---

272. Toute expression qui renferme n lettres a, b, c ..., k, l, et qui ne change pas lorsqu'on permute les lettres les unes dans les autres, se nomme une fonction symétrique.

EXEMPLES.

$$a + b + c,$$
$$abc,$$
$$a^2 + b^2 + c^2$$

sont des fonctions symétriques des lettres a, b, c.

Nous ne considérerons, dans cette note, que les fonctions symétriques entières et rationnelles. Ces fonctions sont des polynomes. Il est évident que si, parmi leurs termes, il en est qui ne soient pas symétriques, c'est-à-dire dans lesquels toutes les lettres n'entrent pas avec des exposants égaux, il devra exister d'autres termes égaux à tous ceux que l'on obtient en changeant, entre elles ou avec les autres, les lettres qui figurent dans ces termes. Par exemple, une fonction symétrique des lettres a, b, c, ..., k, l, ne peut contenir le terme a^2b sans contenir en même temps les termes b^2a, a^2c, a^2d, c^2d, etc... La somme de ces termes se désigne quelquefois par la notation abrégée

$$\Sigma ab^2,$$

le signe Σ indiquant que l'on doit faire la somme de tous les termes qui s'obtiennent au moyen de ab^2, par les changements de lettres.

EXEMPLE. Σa, Σa^2, Σab désignent la somme des lettres, la somme de leurs carrés, la somme de leurs produits deux à deux.

Digitized by

Toute fonction symétrique entière est évidemment la somme d'un certain nombre d'expressions de la forme

$$\Sigma a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots l^\lambda.$$

Le but de cette note est la démonstration du théorème suivant, qui est très-remarquable en lui-même, et fort important dans la théorie des équations :

Théorème. *Toute fonction symétrique, entière et rationnelle de* n *lettres*, a, b, c, ..., k, l, *peut être exprimée rationnellement au moyen des expressions suivantes :*

$$S_1 = \Sigma a,$$
$$S_2 = \Sigma ab,$$
$$S_3 = \Sigma abc,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_n = abc \ldots k, l.$$

Pour le démontrer, supposons que l'on écrive, par ordre alphabétique, tous les termes qui composent la fonction considérée T, c'est-à-dire en plaçant d'abord les termes qui renferment a avec le plus haut exposant; parmi ceux-là, ceux qui renferment b avec le plus haut exposant; parmi ceux qui renferment a et b de la même manière, ceux dans lesquels c a le plus fort exposant, et ainsi de suite; de telle sorte que si, dans le polynome ainsi ordonné, le terme $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots$ précède $a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'} d^{\delta'} \ldots$, la première des différences $\alpha - \alpha'$, $\beta - \beta'$, $\gamma - \gamma'$, qui ne s'annule pas, soit positive. (Il est entendu que l'exposant des lettres qui n'entrent pas est considéré comme nul).

Soit $$a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots l^\lambda$$

le premier des termes ainsi classés, formons le produit

$$S_1^{\alpha-\beta} S_2^{\beta-\gamma} S_3^{\gamma-\delta} \ldots S_n^{\lambda} = P.$$

En ordonnant le produit *par ordre alphabétique*, le premier terme sera précisément

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda;$$

de telle sorte que la différence

$$T - P = T_1$$

Digitized by Google

ne renferme plus ce terme qui est, à la fois le premier de T et de P, et par conséquent, le premier terme de T_1 serait classé, par ordre alphabétique, après le premier terme de T.

T et P étant deux fonctions symétriques, il en est de même de leur différence T_1. Nous pourrons donc opérer sur T_1 comme nous l'avons fait sur T, et trouver une fonction P_1 de S_1, $S_2 \ldots S_n$, telle que le premier terme de $T_1 - P_1 = T_2$ soit classé, par ordre alphabétique, après le premier de T_1. On trouvera de même une fonction P_2 de S_1, $S_2 \ldots S_n$, telle que

$$T_2 - P_2 = T_3,$$

T_3 étant une fonction symétrique dont le premier terme viendrait, par ordre alphabétique, après le premier de T_2, et ainsi de suite indéfiniment. Mais en continuant ainsi, il faudra que l'opération finisse par s'arrêter, et que l'on trouve pour une de ces fonctions, T_μ par exemple, une valeur constante. On aura alors

$$\begin{aligned} T \quad &- P &&= T_1, \\ T_1 \quad &- P_1 &&= T_2, \\ T_2 \quad &- P_2 &&= T_3, \\ &\vdots && \vdots \\ T_{\mu-1} &- P_{\mu-1} &&= T_\mu, \end{aligned}$$

et en ajoutant ces équations membre à membre,

$$T = P + P_1 + \ldots + P_{\mu-1} + T_\mu,$$

ce qui montre, comme nous l'avions annoncé, que P peut s'exprimer au moyen de S_1, S_2, ... S_n.

Applications. 1° Considérons trois lettres a, b, c; posons

$$\begin{aligned} S_1 &= a + b + c, \\ S_2 &= ab + bc + ac, \\ S_3 &= abc, \end{aligned}$$

et cherchons à exprimer en fonction de S_1, S_2, S_3 la somme

$$T = a^2b + a^2c + ab^2 + ac^2 + b^2c + bc^2 = \Sigma a^2b.$$

Le premier terme de T est a^3bc^0. Formons donc le produit $S_1^{3-1}S_2^{1-0}S_3^0$, c'est-à-dire $S_1^2S_2$, nous aurons

$$\begin{aligned} S_1^2S_2 &= (a+b+c)^2(ab+bc+ac) \\ &= \Sigma a^3b + 3\Sigma a^2bc + 2\Sigma a^2b^2 = P; \end{aligned}$$

on trouvera $\quad T - P = -3\Sigma a^2bc - 2\Sigma a^2b^2 = T_1.$

Le premier terme de T_1 est $-2a^2b^2c^0$. Formons donc le produit $-2S_1^{2-2}S_2^{2-0}S_3^0$, c'est-à-dire $-2S_2^2$. Nous aurons

$$P_1 = -2(ab+bc+ac)^2 = -2\Sigma a^2b^2 - 4\Sigma a^2bc,$$

et par suite,

$$T_1 - P_1 = 4\Sigma a^2bc - 3\Sigma a^2bc = \Sigma a^2bc = T_2.$$

Le premier terme de T_2 étant a^2bc, formons le produit $S_1^{2-1}S_2^0S_3$, c'est-à-dire S_1S_3; nous aurons

$$P_2 = (a+b+c)abc = \Sigma a^2bc.$$

La différence $T_2 - P_2$ est nulle. Nous avons donc les égalités

$$\begin{aligned} T - P &= T_1, \\ T_1 - P_1 &= T_2, \\ T_2 - P_2 &= 0; \end{aligned}$$

d'où l'on conclut, en ajoutant,

$$T = P + P_1 + P_2 = S_1^2S_2 - 2S_2^2 + S_1S_3$$

2° Considérons encore quatre lettres a, b, c, d, et posons

$$\begin{aligned} S_1 &= a+b+c+d, \\ S_2 &= ab+ac+ad+bc+bd+cd, \\ S_3 &= abc+abd+acd+bcd, \\ S_4 &= abcd. \end{aligned}$$

Cherchons à exprimer, au moyen de S_1, S_2, S_3, S_4, la fonction symétrique

$$a^3+b^3+c^3+d^3 = T.$$

Digitized by Google

Le premier terme de T étant $a^3b^0c^0d^0$, posons

$$P = S_1^3 = (a+b+c+d)^3 = \Sigma a^3 + 3\Sigma a^2b + 6\Sigma abc,$$

nous aurons $\quad T - P = -3\Sigma a^2b - 6\Sigma abc = T_1.$

Le premier terme de T_1 est $-3a^2bc^0d^0$; posons donc

$$P_1 = -3S_1S_2 = -3(a+b+c+d)(ab+ac+bc+\ldots)$$
$$= -3\Sigma a^2b - 9\Sigma abc;$$

on aura $\quad T_1 - P_1 = 3\Sigma abc = 3S_3;$

nous avons donc

$$T - P = T_1,$$
$$T_1 - P_1 = 3S_3;$$

d'où, en ajoutant,

$$T = P + P_1 + 3S_3 = S_1^3 - 3S_1S_2 + 3S_3.$$

EXERCICES.

I. On a

$$\Sigma(a-b)^n = m\Sigma a^n - n\Sigma a\Sigma a^{n-1} + \frac{n.n-1}{2}\Sigma a^2\Sigma a^{n-2} - \ldots$$

n désignant un nombre pair, et m le nombre des lettres a, b, $c, \ldots k, l$.

II. Si l'on a $\quad \Sigma ab = 0, \quad \Sigma abcd = \Sigma a\Sigma abc$

prouver que l'on aura

$$(\Sigma a)^2 = \Sigma a^2,$$
$$(\Sigma a)^4 = \Sigma a^4.$$

Digitized by Google

NOTE 3.

SUR LA THEORIE DES APPROXIMATIONS.

---

273. Il arrive souvent qu'un nombre se trouve évalué au moyen de plusieurs autres qui ne sont connus qu'approximativement. Si, dans l'expression, on substitue alors à ces nombres leurs valeurs approchées, il en résulte, sur le résultat final, une erreur qui dépend, à la fois, de celles qui ont été commises sur les divers nombres et de l'opération exécutée sur eux. Il est utile alors de calculer la plus grande valeur que puisse avoir cette erreur, et, réciproquement, de chercher à quel degré d'approximation on doit calculer les divers nombres sur lesquels l'opération s'exécute, pour que l'erreur commise sur le résultat ne dépasse pas une limite donnée. L'étude de ces deux questions fait l'objet de cette note.

Limite de l'erreur commise sur le résultat d'une opération.

274. Addition et Soustraction. Supposons qu'un nombre inconnu soit donné par la formule

$$x = A + B - C - D + E,$$

A, B, C, D, E ayant respectivement pour valeurs approchées A_1, B_1, C_1, D_1, E_1. Supposons que les erreurs commises dans l'évaluation de A, B, C, D, E, soient, tout au plus, α, β, γ, δ, ε en plus, et α', β', γ', δ', ε' en moins, c'est-à-dire que A soit compris entre $A_1 - \alpha$ et $A_1 + \alpha'$, B entre $B_1 - \beta$ et $B_1 + \beta'$, C entre $C_1 - \gamma$ et $C_1 + \gamma'$, D entre $D_1 - \delta$ et $D_1 + \delta'$, et E entre $E_1 - \varepsilon$ et $E_1 + \varepsilon'$. La valeur approchée de x est

$$A_1 + B_1 - C_1 - D_1 + E_1,$$

et il est évident que la valeur exacte est plus grande que celle

Digitized

que l'on obtiendrait en donnant à chaque terme positif la plus petite, et à chaque terme négatif la plus grande valeur qu'on puisse lui supposer, on aura donc

$$x > A_1 - \alpha + B_1 - \beta - C_1 - \gamma' - D_1 - \delta' + E_1 - \varepsilon,$$

et on verra de même que l'on a

$$x < A_1 + \alpha' + B_1 + \beta' - C_1 + \gamma - D_1 + \delta + E_1 + \varepsilon',$$

ou, en nommant x_1 la valeur approchée $A_1 + B_1 - C_1 - D_1 + E_1$,

$$x > x_1 - (\gamma' + \delta' + \alpha + \beta + \varepsilon),$$
$$x < x_1 + (\alpha' + \beta' + \varepsilon' + \gamma + \delta),$$

et l'on voit que l'erreur commise, en adoptant pour x la valeur x_1, est, tout au plus, $\gamma' + \delta' + \alpha + \beta + \varepsilon$ en plus, ou $\alpha' + \beta' + \varepsilon' + \gamma + \delta$ en moins.

275. Multiplication. Supposons qu'un nombre inconnu soit donné par la formule

$$x = A \times B,$$

A et B ayant respectivement pour valeurs approchées A_1 et B_1; supposons, comme précédemment, que les erreurs commises sur A et B soient, tout au plus, α et β en plus, ou α' et β' en moins. La valeur approchée de x est

$$x_1 = A_1 + B_1,$$

et il est évident que la valeur exacte est plus grande que

$$(A_1 - \alpha)(B_1 - \beta)$$

et plus petite que

$$(A_1 + \alpha')(B_1 + \beta').$$

On aura donc

$$x > (A_1 - \alpha)(B_1 - \beta) > x_1 - A_1\beta - B_1\alpha + \alpha\beta,$$
$$x < (A_1 + \alpha')(B_1 + \beta') < x_1 + A_1\beta' + B_1\alpha' + \alpha'\beta',$$

et l'on voit que l'erreur commise, en adoptant pour x la valeur x_1, est, tout au plus, $A_1\beta + B_1\alpha - \alpha\beta$ en plus, et $A_1\beta' + B_1\alpha' + \alpha'\beta'$ en moins.

Digitized by

276. Division. Supposons qu'un nombre inconnu soit donné par la formule

$$x=\frac{A}{B},$$

A et B ayant, comme précédemment, pour valeurs approchées A_1 et B_1, les erreurs commises étant, tout au plus, α et β en plus, ou α' et β' en moins. La valeur approchée de x est

$$x_1=\frac{A_1}{B_1},$$

et il est évident que l'on a

$$x>\frac{A_1-\alpha}{B_1+\beta'},$$

$$x<\frac{A_1+\alpha'}{B_1-\beta}.$$

L'erreur commise, en plus, est donc tout au plus

[1] $$\frac{A_1}{B_1}-\frac{A_1-\alpha}{B_1+\beta'}=\frac{A_1\beta'+B_1\alpha}{B_1(B_1+\beta')},$$

et l'erreur commise, en moins,

[2] $$\frac{A_1+\alpha'}{B_1-\beta}-\frac{A_1}{B_1}=\frac{B_1\alpha'+A_1\beta}{B_1(B_1-\beta)}.$$

277. Racine carrée. Supposons qu'un nombre soit donné par la formule

$$x=\sqrt{A},$$

et que A_1 soit, comme plus haut, la valeur approchée de A, l'erreur commise étant, tout au plus, α en plus ou α' en moins. On aura, pour valeur approchée de x,

$$x_1=\sqrt{A_1},$$

et, évidemment,

$$x>\sqrt{A_1-\alpha},$$

$$x<\sqrt{A_1+\alpha'}.$$

L'erreur commise en plus est donc, tout au plus,

$$\sqrt{A_1}-\sqrt{A_1-\alpha},$$

et l'erreur commise en moins

$$\sqrt{A_1+\alpha'}-\sqrt{A_1}.$$

L'expression de ces deux erreurs peut se simplifier, si on multiplie et divise par la somme des radicaux : la première devient

$$\frac{\alpha}{\sqrt{A_1}+\sqrt{A_1-\alpha}},$$

l'erreur en plus est donc, *à fortiori*, plus petite que

$$\frac{\alpha}{2\sqrt{A_1-\alpha}};$$

la seconde devient
$$\frac{\alpha'}{\sqrt{A_1+\alpha'}+\sqrt{A_1}},$$

l'erreur en moins est donc, *à fortiori*, moindre que

$$\frac{\alpha'}{2\sqrt{A_1}}.$$

278. Racine cubique. Supposons qu'un nombre soit donné par la formule

$$x=\sqrt[3]{A},$$

et que A_1 soit la valeur approchée de A, l'erreur commise étant, tout au plus α en plus, ou α' en moins. On aura pour valeur approchée de x,

$$x_1=\sqrt[3]{A_1},$$

et évidemment
$$x>\sqrt[3]{A_1-\alpha},$$

$$x<\sqrt[3]{A_1+\alpha'}.$$

L'erreur commise en plus est donc, tout au plus,

[1]
$$\sqrt[3]{A_1}-\sqrt[3]{A_1-\alpha},$$

et l'erreur commise en moins

[2]
$$\sqrt[3]{A_1+\alpha'}-\sqrt[3]{A_1}.$$

Digitized by Google

Ces deux différences peuvent prendre une forme plus simple, si on multiplie et divise la première par

$$(\sqrt[3]{A_1})^2+\sqrt[3]{A_1}\sqrt[3]{A_1-\alpha}+(\sqrt[3]{A_1-\alpha})^2,$$

et la seconde par

$$(\sqrt[3]{A_1+\alpha'})^2+\sqrt[3]{A_1}\sqrt[3]{A_1+\alpha'}+(\sqrt[3]{A_1})^2.$$

La première devient ainsi

$$\frac{\alpha}{(\sqrt[3]{A_1})^2+\sqrt[3]{A_1}\sqrt[3]{A_1-\alpha}+(\sqrt[3]{A_1-\alpha})^2},$$

et l'erreur commise en plus, est, *à fortiori*, moindre que

$$\frac{\alpha}{3(\sqrt[3]{A_1-\alpha})^2};$$

l'expression [2] devient

$$\frac{\alpha'}{(\sqrt[3]{A_1+\alpha'})^2+\sqrt[3]{A_1}\sqrt[3]{A_1+\alpha'}+(\sqrt[3]{A_1})^2},$$

et l'erreur commise en moins est, *à fortiori*, moindre que

$$\frac{\alpha'}{3(\sqrt[3]{A_1})^2}.$$

279. Remarque. Dans la plupart des cas, on sait dans quel sens les valeurs approchées dont on fait usage, sont inexactes. Il faut alors, dans les formules précédentes, supposer nulles les plus grandes erreurs que l'on peut craindre dans l'autre sens.

Exemple. Soit $x=\frac{A}{B}$ et A_1, B_1 les valeurs approchées, par défaut, de A et B à moins de $\frac{1}{10}$, il faut, dans les formules trouvées (**276**), supposer $\alpha'=\frac{1}{10}$, $\alpha=0$, $\beta'=\frac{1}{10}$, $\beta=0$, et l'expression de la plus grande erreur possible en moins devient

$$\frac{\frac{1}{10}B_1}{B_1^2}=\frac{1}{10B_1},$$

et celle de la plus grande erreur possible en plus,

$$\frac{\frac{1}{10}A_1}{B_1(B_1+\frac{1}{10})}.$$

Digitized by Google

Moyen d'obtenir sur le résultat une erreur moindre qu'une limite donnée.

280. Nous supposerons, dans ce qui va suivre, que les valeurs approchées dont on fait usage soient toutes calculées par défaut, c'est-à-dire moindres que la valeur exacte. Rien ne serait plus facile que de modifier les formules pour les adapter au cas où l'approximation a lieu dans un autre sens.

PROBLÈME I. *A quel degré d'approximation faut-il calculer* A, B, C, D, E, *pour être sûr que l'erreur commise sur*

$$A + B - C - D + E$$

soit moindre que i*?*

Soit α' le degré d'approximation cherché, les quantités A, B, C, D, E étant toutes calculées par défaut, il peut se faire cependant que le résultat soit trop petit ou trop grand. Exprimons que, dans l'un et l'autre cas, l'erreur commise est moindre que i. En supposant (**274**)

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0, \quad \varepsilon = 0,$$

$$\alpha' = \beta' = \gamma' = \delta' = \varepsilon',$$

on voit que la plus grande erreur possible en moins est $3\alpha'$, et la plus grande erreur possible en plus est $2\alpha'$. On doit donc avoir

$$3\alpha' < i,$$

$$2\alpha' < i,$$

et, pour satisfaire à ces deux conditions, il suffira, évidemment, de faire

$$\alpha' < \frac{i}{3}.$$

PROBLÈME II. *Assigner pour* A *et* B *un degré d'approximation tel que l'erreur commise sur le produit* $A \times B$ *soit moindre que* i.

Soit α' le degré d'approximation cherché, A_1 et B_1 les valeurs approchées de A et de B; ces valeurs étant approchées par défaut, l'erreur commise est en moins, et la plus grande

valeur qu'on puisse lui supposer s'obtiendra, en supposant (275):

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \alpha' = \beta',$$

elle est, par conséquent,

$$(A_1 + B_1)\alpha' + \alpha'^2,$$

et l'on doit avoir $$(A_1 + B_1)\alpha' + \alpha'^2 < i,$$

ce qui revient à $$\alpha' < \frac{i}{A_1 + B_1 + \alpha'},$$

égalité qui sera, *à fortiori*, satisfaite, si l'on remplace $A_1 + B_1 + \alpha'$ par un nombre plus grand qu'il sera toujours facile d'obtenir, car on sait que $A_1 + B_1 + \alpha'$ diffère peu de $A + B$.

PROBLÈME III. *Assigner pour* A *et* B *un degré d'approximation tel que l'erreur commise sur le quotient* $\frac{A}{B}$ *soit moindre que* i.

Soit α' le degré d'approximation cherché, A_1 et B_1 les valeurs approchées de A et de B ; l'erreur commise peut l'être en plus ou en moins, sa plus grande valeur dans l'une et l'autre hypothèse est fournie (276) par les expressions [1] et [2], dans lesquelles il faut supposer $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et $\beta' = \alpha'$, et pour que cette erreur soit, dans les deux cas, plus petite que i, il faut que l'on ait

$$\frac{A_1\alpha'}{B_1(B_1 + \alpha')} < i,$$

$$\frac{B_1\alpha'}{B_1^2} < i;$$

on déduit de la première

$$\alpha'(A_1 - B_1 i) < B_1^2 i;$$

si $A_1 - B_1 i$ est négatif, cette inégalité est satisfaite d'elle-même; s'il est positif, elle équivaut à

$$\alpha' < \frac{B_1^2 i}{A_1 - B_1 i},$$

la seconde inégalité revient à

$$\alpha' < iB_1,$$

et il suffira de prendre α' plus petit que la plus petite de ces deux limites.

REMARQUE. A_1 et B_1 n'étant pas donnés, les limites trouvées pour α' ne sont pas complétement connues, mais cela n'a aucun inconvénient, car, par la nature de la question, il est permis de substituer à ces nombres A_1 et B_1 des valeurs différentes qui rendent les expressions plus petites; on pourra, par conséquent, substituer à A_1 une valeur plus grande et à B_1 une valeur plus petite.

PROBLÈME IV. *Assigner pour le nombre* A *un degré d'approximation tel que l'erreur commise sur* $\sqrt{A}$ *soit moindre que* i.

Soit α' le degré d'approximation cherché, A_1 la valeur approchée de A; prenant $\sqrt{A_1}$ pour $\sqrt{A}$, on commet une erreur en moins, qui (277) est plus petite que

$$\frac{\alpha'}{2\sqrt{A_1}};$$

il suffira donc, pour satisfaire à la condition demandée, de poser

$$\frac{\alpha'}{2\sqrt{A_1}} < i,$$

ou

$$\alpha' < 2i\sqrt{A_1};$$

la condition sera, *à fortiori*, remplie si l'on substitue à $\sqrt{A_1}$ un nombre plus petit.

PROBLÈME V. *Assigner pour le nombre* A *un degré d'approximation tel que l'erreur commise sur* $\sqrt[3]{A}$ *soit moindre que* i.

Soit α' le degré d'approximation cherché, A_1 la valeur approchée de A. En prenant $\sqrt[3]{A_1}$ pour $\sqrt[3]{A}$, on commet une erreur en moins qui (278) est plus petite que

$$\frac{\alpha'}{3(\sqrt[3]{A_1})^2};$$

il suffira donc, pour satisfaire à la condition énoncée, de poser

$$\frac{\alpha'}{3(\sqrt[3]{A_1})^2} < i,$$

ou

$$\alpha' < 3i(\sqrt[3]{A_1})^2;$$

la condition sera, *à fortiori*, remplie si on substitue à A_1 une valeur moindre.

EXERCICES.

I. Lorsqu'un nombre est plus grand que l'unité, si l'on connaît n chiffres décimaux exacts de la valeur de ce nombre, avec quelle approximation peut-on obtenir sa racine carrée ou cubique?

II. Un nombre entier a $2n+1$ chiffres, on connaît les $n+1$ premiers, avec quelle approximation peut-on calculer sa racine carrée?

III. Le temps employé par un corps pesant pour tomber de 25^m est $\sqrt{\frac{25\cdot 2}{g}}$, g étant égal à 9,8088 ..., combien faut-il prendre de décimales exactes dans cette valeur pour que le résultat puisse être obtenu à $\frac{1}{100}$ près?

IV. Trouver, à un millimètre près, le rayon d'une sphère d'or de 10000^f, sachant que l'or vaut 16 fois plus que l'argent, à poids égal, et pèse, à volume égal, 19 fois plus que l'eau.

SOLUTIONS DES EXERCICES.

CHAPITRE PREMIER.

I.

Les distances des deux courriers au point O sont, après le temps t, $a+vt$, $a'+v't$; la distance qui les sépare $a-a'+(v-v')t$ ou $a'-a+(v'-v)t$, selon que le premier se trouve en avant ou en arrière du second. La distance du point O au milieu de la distance qui les sépare est, dans tous les cas, $\frac{a+a'}{2}+\frac{v+v'}{2}t$.

II.

On a $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2,$

et retranchant $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab.$

Si l'on pose $a+b=A,\quad a-b=B,$

il vient $A^2-B^2=4ab=2a\,.\,2b;$

mais $2a=a+b+a-b=A+B,$

$2b=(a+b)-(a-b)=A-B,$

et, par suite, $A^2-B^2=(A+B)(A-B).$

III.

$$F\frac{P'}{P}+R\frac{V'^2}{V^2}.$$

Digitized by Google

IV.

Dans le premier, $\frac{a}{2}$ d'eau, $\frac{b}{2}$ de vin ;

Dans le second, $\frac{2a' + a}{3}$ d'eau, $\frac{2b' + b}{3}$ de vin;

Dans le troisième, $a'' + \frac{2a' + a}{6}$ d'eau, $b'' + \frac{2b' + b}{6}$ de vin.

V.

Dans le premier vase, la quantité d'eau sera

$$\left[\frac{(v-u)^2}{v} + \frac{u^2}{v'}\right]\frac{v-u}{v} + u\left(\frac{v'-u}{v'} + \frac{v-u}{v}\right)\frac{u}{v'},$$

et la quantité de vin

$$u\left(\frac{v-u}{v} + \frac{v'-u}{v'}\right)\frac{v-u}{v} + \left[\frac{(v'-u)^2}{v'} + \frac{u^2}{v}\right]\frac{u}{v'};$$

les quantités analogues, pour le second vase, s'obtiendront en changeant v en v', v' en v, et faisant correspondre à un liquide la formule qui, ici, correspond à l'autre.

VI.

Si chaque mois avait trente-et-un jours, les rangs des jours du $(n+1)^{me}$ mois seraient

$$[1] \qquad m + 31n.$$

Mais les 2^{me}, 4^{me}, 7^{me} et 9^{me} mois ont trente jours; la formule [1] donne donc une valeur trop grande, savoir : de une unité, si n est 2 ou 3; de 2 unités, si n est 4, 5 ou 6; de 3 unités, si n est 7 ou 8, et de 4 unités, si n est 9, 10 ou 11; or les excès sont précisément représentés par la partie entière de $\frac{5n+4}{12}$, pour les mêmes valeurs de n.

Digitized by Google

VII.

Le degré du mélange est $\dfrac{HD + H'D'}{H + H'}$;

le prix est $(H + H')P + a\left(\dfrac{HD + H'D'}{H + H'} - N\right)(H + H')$,

Cette formule convient lors même que $\dfrac{HD + H'D'}{H + H'}$ est moindre que N.

CHAPITRE II.

I.

Soit le polynome $a + b + c + d + \ldots k + l$. Pour le multiplier par lui-même, il faut multiplier successivement chacun des termes a, b, c, ..., k, l par a, b, c, ..., k, l : on obtiendra ainsi chacun des carrés a^2, b^2, ..., l^2, et deux fois chacun des produits des termes deux à deux : car l'un d'eux, bd par exemple, s'obtiendra en multipliant le terme b du multiplicande par le terme d du multiplicateur, et le terme d du multiplicande par le terme b du multiplicateur.

II.

Soit le polynome $a + b + c + \ldots + k + l$. Son cube est le produit du carré

$$a^2 + b^2 + \ldots + l^2 + 2ab + \ldots$$

par
$$a + b + c + \ldots + k + l.$$

Il est évident que, dans le produit, il y aura des termes tels que a^3, qui se trouveront chacun une fois; des termes tels que a^2b, qui se trouveront trois fois, savoir : comme produit de a^2 par b, et ensuite comme produit de $2ab$ par a; des termes

Digitized by Google

tels que abc, qui se trouvent six fois : comme produits de $2ab$ par c, de $2ac$ par b, et de $2bc$ par a.

III.

Il suffit d'effectuer les opérations indiquées dans les deux membres : ils deviennent identiques.

IV.

On a

$$AB = [(a+b)+(c+d)][(a+b)-(c+d)] = (a+b)^2 - (c+d)^2,$$

$$A^2+B^2 = [(a+b)+(c+d)]^2 + [(a+b)-(c+d)]^2 = 2[(a+b)^2+(c+d)^2],$$

$$\begin{aligned} AB(A^2+B^2) &= 2[(a+b)^2-(c+d)^2][(a+b)^2+(c+d)^2] \\ &= 2[(a+b)^4-(c+d)^4]. \end{aligned}$$

On verra de même que

$$CD(C^2+D^2) = 2[(a-b)^4-(c-d)^4];$$

or on a

$$(a-b)^4 = (a^2-2ab+b^2)^2 = a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4,$$

$$(a+b)^4 = (a^2+2ab+b^2)^2 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4,$$

$$(a+b)^4-(a-b)^4 = 8a^3b+8ab^3 = 8ab(a^2+b^2),$$

et de même $(c+d)^4-(c-d)^4 = 8cd(c^2+d^2)$,

et, par suite, d'après l'hypothèse,

$$(a+b)^4-(a-b)^4 = (c+d)^4-(c-d)^4,$$

ce qui prouve la proposition énoncée.

V, VI ET VII.

Ces trois exercices ne présentent d'autre difficulté que la longueur des calculs : le lecteur les vérifiera lui-même.

Digitized by Google

VIII.

Admettons que la formule soit démontrée, quand il n'y a que n quantités a, b, c, ..., k. Pour prouver qu'elle est vraie, quand on introduit, en plus, la quantité l, il suffit de prouver que, dans les deux membres, les termes en l sont les mêmes; or, dans le premier membre, les termes en l sont représentés par

$$(a+b+c+\ldots+k)\,l\,(a+b+c+\ldots+k+l),$$

ou $$l^2(a+b+c+\ldots+k)+l(a+b+c+\ldots+k)^2;$$

or, dans le second membre, en prenant les termes en l^2 (un dans chaque parenthèse), on trouve, en effet,

$$l^2k+l^2j+\ldots+l^2a,$$

et les termes en l sont

$$lk^2+lj(k+j)+kjl+\ldots+la(k+j+\ldots+b+a)+(k+j+\ldots+b)al,$$

et il est évident que l multiplie la somme des carrés $k^2+j^2+\ldots+a^2$, et deux fois la somme des produits deux à deux de ces quantités.

IX.

On a

$$2y^2+3z^2+6t^2=(y+z-t)^2+(z-y-t)^2+(z+2t)^2.$$

X.

Il suffit de prouver que si la formule est vraie pour le cas de m nombres, elle le sera encore quand on en considérera $m+1$. Soit donc le théorème démontré pour les nombres x, y, z, u, v, de sorte qu'en posant

$$\frac{x-y}{x+y}=m,\quad \frac{y-z}{y+z}=p,\quad \frac{z-u}{z+u}=q,\quad \frac{u-v}{u+v}=r,\quad \frac{v-x}{v+x}=h,$$

on ait

$$(1+m)(1+p)(1+q)(1+r)(1+h)=(1-m)(1-p)(1-q)(1-r)(1-h).$$

Digitized by Google

Il faut prouver que

$$(1+m)(1+p)(1+q)(1+r)(1+s)(1+t)=(1-m)(1-p)(1-q)$$
$$(1-r)(1-s)(1+t),$$

ou, en divisant les deux membres par ceux de l'égalité précédente,

$$\frac{(1+s)(1+t)}{1+h}=\frac{(1-s)(1-t)}{1-h},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\left(1+\frac{v-w}{v+w}\right)\left(1+\frac{w-x}{w+x}\right)}{1+\frac{v-x}{v+x}}=\frac{\left(1-\frac{v-w}{v+w}\right)\left(1-\frac{w-x}{w+x}\right)}{1-\frac{v-x}{v+x}},$$

ce qui se vérifie facilement.

XI.

$$p^2+q^2+r^2+s^2+t^2)(p'^2+q'^2+r'^2+s'^2+t'^2)-(pp'+qq'+rr'+ss'+tt')^2$$
$$=(pq'-qp')^2+(pr'-rp')^2+(ps'-p's)^2+(pt'-p't)^2+(qr'-q'r)^2$$
$$+(qs'-q's)^2+(qt'-q't)^2+(rs'-r's)^2+(rt'-r't)^2+(st'-s't)^2.$$

XII.

Supposons que p soit pair et égal à $2h$, le coefficient de x^p est évidemment

$$2p+2(p-1)+2(p-2)2+2(p-3)3+\ldots+2[p-(h-1)](h-1)+h^2$$

ou $2p[1+1+2+3+\ldots(h-1)]-2[1+2^2+3^2+\ldots+(h-1)^2]+h^2$;

or on a $\quad 1+1+2+3+\ldots h-1=1+\frac{h.(h-1)}{2}$,

$$1+2^2+3^2+\ldots+(h-1)^2=\frac{(h-1)h(2h-1)}{6}.$$

Le coefficient demandé est donc, en remplaçant h par $\frac{p}{2}$,

$$2p\left\{1+\frac{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-1\right)}{2}\right\}-\frac{2\left(\frac{p}{2}-1\right)\frac{p}{2}(p-1)}{6}+\frac{p^2}{4},$$

ou, en réduisant au même dénominateur et effectuant les calculs,

$$\frac{p^3 + 11p}{6}.$$

Si p est impair et égal à $2h + 1$, le coefficient de x^p est

$$2p + 2(p-1) + \dots 2(p-h)h = 2p(1 + 1 + 2 + 3 + \dots + 4) \\ - 2(1 + 2^2 \dots + 4^2),$$

et l'on effectue facilement la somme en se servant, comme plus haut, des formules qui donnent la somme des nombres naturels et la somme de leurs carrés.

XIII.

En multipliant les deux membres par $b^2c^2(b^2 - c^2)$, les dénominateurs disparaissent, et l'on obtient une identité.

XIV.

Cette égalité se vérifie, comme la précédente, en multipliant les deux membres par $b^2c^2(c^2 - b^2)$ et effectuant les opérations.

XV.

En multipliant les deux membres par $b^2c^2(c^2-b^2)(y^2-b^2)(c^2-y^2)$, les dénominateurs disparaissent, et en effectuant les opérations on obtient une identité.

XVI.

En multipliant les deux membres par $p^2q^2(p+q)^2$, on obtient une identité.

XVII.

En supprimant les facteurs communs aux deux membres, cette égalité devient

$$\frac{1 - x^m}{1 - x^{p+1}} = \frac{1 - x^{m-p-1}}{1 - x^{p+1}} + x^{m-p-1},$$

ce qui devient identique si l'on réduit les deux termes du second membre au même dénominateur.

CHAPITRE III.

I.

En posant
$$[-q+(q^2+p^3)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{3}}=\mathrm{A},$$
$$[-q-(q^2+p^3)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{3}}=\mathrm{B};$$
on a
$$x=\mathrm{A}+\mathrm{B},$$
$$x^3=\mathrm{A}^3+\mathrm{B}^3+3\mathrm{AB}(\mathrm{A}+\mathrm{B})=\mathrm{A}^3+\mathrm{B}^3+3\mathrm{AB}x,$$
mais
$$\mathrm{A}^3+\mathrm{B}^3=-2q,$$
$$\mathrm{AB}=[-q+(q^2+p^3)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{3}}[-q-(q^2+p^3)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{3}},$$
ou
$$\mathrm{AB}=(-p^3)^{\frac{1}{3}}=-p;$$
donc
$$x^3=-2q-3px,$$
ce qu'il fallait démontrer.

II.

En élevant les membres au carré
$$\frac{a+(a^2-b)^{\frac{1}{2}}}{2}+\frac{a-(a^2-b)^{\frac{1}{2}}}{2}$$
$$+2\left\{\frac{[a+(a^2-b)^{\frac{1}{2}}][a-(a^2-b)^{\frac{1}{2}}]}{4}\right\}^{\frac{1}{2}}=a+b^{\frac{1}{2}},$$
mais
$$[a+(a^2-b)^{\frac{1}{2}}][a-(a^2-b)^{\frac{1}{2}}]=b,$$
donc, en supprimant de plus les termes $\frac{(a^2-b)^{\frac{1}{2}}}{2}$ et $\frac{-(a^2-b)^{\frac{1}{2}}}{2}$ qui se détruisent, on obtient une identité.

III.

La valeur réduite est $4x\sqrt{x^2-1}$.

IV.

Le premier membre, en développant le carré indiqué, est égal à

$$[e^3+2f^2+2f(f^2+e^3)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{3}}+[e^3+2f^2-2f(f^2+e^3)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{3}}$$
$$+2\{[f+(f^2+e^3)^{\frac{1}{2}}][f-(f^2+e^3)^{\frac{1}{2}}]\}^{\frac{1}{3}}+2e,$$

ce qui équivaut bien à

$$\{e^3+2f^2+[(e^3+2f^2)^2-e^6]^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}}+\{e^3+2f^2-[(e^3+2f^2)^2-e^6]^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}};$$

si on observe que l'on a

$$2\{[f+(f^2+e^3)^{\frac{1}{2}}][f-(f^2+e^3)^{\frac{1}{2}}]\}^{\frac{1}{3}}=-2e,$$

et $$[(e^3+2f^2)^2-e^6]^{\frac{1}{2}}=(4e^3f^2+4f^4)^{\frac{1}{2}}=2f(f^2+e^3)^{\frac{1}{2}}.$$

CHAPITRE IV.

I.

Il est évident que la solution ne dépend pas de m, n, m', n', et, en effet, on peut considérer les deux vases comme renfermant chacun un certain liquide et chercher à mélanger les liquides en même proportion dans les deux vases, il est certain qu'alors le rapport de la quantité d'eau à la quantité de vin sera la même dans l'un et dans l'autre.

En nommant x la capacité du vase inconnu, l'équation du problème est

$$\frac{v-x}{x}=\frac{x}{v'-x},$$

ou $$vv'-(v+v')x+x^2=x^2,$$

d'où l'on déduit $$x=\frac{vv'}{v+v'}.$$

II.

Soit x le degré de l'eau-de-vie à a^f le litre, ou à $100a^f$ l'hectolitre, nous aurons, en désignant par α ce que nous avons appelé a dans l'exercice VII du chapitre I,

$$P+\alpha(x-N)=100a,$$

donc

$$x=\frac{100a-P+\alpha N}{\alpha},$$

de même le degré de l'eau-de-vie à b^f est

$$\frac{100b-P+\alpha N}{\alpha};$$

si l'on mélange H hectolitres d'eau-de-vie au premier degré avec $(1-H)$ hectolitres d'eau-de-vie au second, on aura un hectolitre au prix de

$$P+\alpha\left[\frac{H(100a-P+\alpha N)}{\alpha}+(1-H)\frac{(100b-P+\alpha N)}{\alpha}-N\right],$$

et, en égalant cette expression à $100c$, on aura une équation du premier degré pour déterminer H.

III.

Soit x le nombre des secondes après lequel cela aura lieu, l'arc parcouru par l'extrémité de l'aiguille des secondes est $\frac{x}{60}$, (en prenant la circonférence pour unité); l'aiguille des minutes parcourt dans le même temps un arc $\frac{x}{(60)^2}$, et l'aiguille des heures $\frac{x}{(60)^3}$. L'équation du problème est

$$\frac{x}{60}-1=\left[\frac{x}{(60)^3}+\frac{x}{(60)^2}\right]\frac{1}{2},$$

et on en déduira la valeur de x.

Digitized by Google

IV.

Nous supposons que les $\frac{3}{5}$ soient pris à partir du mobile le plus éloigné de O.

Si x est le temps cherché, on doit avoir, après le temps x,

$$a+vx=a'+v'x+\tfrac{2}{5}[a''-a'+(v''-v')x],$$

ou bien $$a+vx=a''+v''x+\tfrac{2}{5}[a'-a''+(v'-v'')x],$$

selon que le troisième mobile sera, à l'époque demandée, en avant ou en arrière du second. Il peut donc se faire qu'il y ait deux solutions. Il peut arriver qu'il n'y en ait aucune, car la valeur fournie pour x par la première équation doit satisfaire à la condition

$$a''-a'+(v''-v')x>0,$$

et celle qui est fournie par la seconde doit satisfaire, au contraire, à la condition

$$a'-a''+(v'-v'')x>0;$$

il peut donc se faire qu'on doive n'adopter que l'une d'elles ou les rejeter toutes les deux.

V.

Soit x la fortune de A, s'il gagne, il aura $x+12$; la fortune de B est donc $\frac{x+12}{3}+12$. Si B gagne, sa fortune sera $\frac{x+12}{3}+24$, et l'on doit avoir

$$\frac{x+12}{3}+24=\frac{1}{2}(x-12),$$

d'où l'on déduira la valeur de x,

$$x=204,$$

la fortune de B est 84.

VI.

Soit $2x$ la base, x la hauteur, l'équation du problème est

$$(2x+1)(x+1)-2x^2=9,$$

on en déduit $x=\frac{8}{3}$.

VII.

Soit x l'excès de ces trois nombres sur 3, 5, 8; on doit avoir

$$\frac{5+x}{3+x}=\frac{8+x}{5+x},$$

ou $$25+10x+x^2=24+11x+x^2,$$

$$x=1,$$

les nombres demandés sont 4, 6, 9.

VIII.

Soient a, b, c les côtés du parallélipipède, on doit avoir

$$\frac{6x^2}{2(ab+bc+ac)}=\frac{x^3}{abc},$$

d'où $$x=\frac{3abc}{ab+bc+ac}.$$

IX.

L'équation du problème est

$$a+x:b+x::c+x:d+x,$$

d'où l'on déduit $$x=\frac{bc-ad}{a+d-b-c}.$$

X.

Il vient, en élevant les deux membres au carré et supprimant le terme 1 qui est commun,

$$\sqrt{x^4 - x^3} = x^2 - 2x,$$

en élevant encore au carré

$$x^4 - x^3 = x^4 - 4x^3 + 4x^2,$$

d'où, en supprimant x^4 et divisant par x^2,

$$x = \frac{4}{3}.$$

XI.

En élevant les deux membres au carré, il vient

$$a + x + \frac{a}{a+x} - 2\sqrt{a} = 2a + x,$$

multipliant les deux membres par $(a+x)$

$$a^2 + 2ax + x^2 + a - 2a\sqrt{a} - 2\sqrt{a}x = 2a^2 + 3ax + x^2,$$

et en supprimant le terme x^2, il reste une équation du premier degré qui fournira la valeur de x.

XII.

L'équation peut s'écrire

$$\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} : \sqrt{a+x} - \sqrt{a-x} :: \sqrt{b} : 1\,;$$

on en déduit $\sqrt{a+x} : \sqrt{a-x} :: \sqrt{b} + 1 : \sqrt{b} - 1$,

ou $$\frac{a+x}{a-x} = \frac{(1+\sqrt{b})^2}{(1-\sqrt{b})^2};$$

équation du premier degré qui fournira la valeur de x. On peut l'écrire

$$a + x : a - x :: (1+\sqrt{b})^2 : (1-\sqrt{b})^2,$$

Digitized by Google

d'où l'on déduit

$$a : x :: (1+\sqrt{b})^2+(1-\sqrt{b})^2 : (1+\sqrt{b})^2-(1-\sqrt{b})^2,$$

d'où
$$x=\frac{4a\sqrt{b}}{2(1+b)}=\frac{2a\sqrt{b}}{1+b}.$$

XIII.

En élevant au cube, il vient

$$2a+3\left(\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}\right)\sqrt[3]{a^2-x}=b,$$

ou
$$2a+3\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{a^2-x}=b,$$

d'où l'on déduira $\sqrt[3]{a^2-x}$, et, par suite, x.

XIV.

Multipliant par $(2+x)^{\frac{1}{2}}$, il vient

$$2+x+x^{\frac{1}{2}}(2+x)^{\frac{1}{2}}=4,$$

ou
$$2-x=x^{\frac{1}{2}}(2+x)^{\frac{1}{2}},$$

en élevant au carré

$$4-4x+x^2=x(2+x)=2x+x^2,$$

d'où l'on déduit $x=\frac{2}{3}$.

XV.

En élevant les deux membres au carré, il vient

$$\frac{1}{x^2}+\frac{2}{ax}=\sqrt{\frac{1}{x^4}+\frac{1}{a^2x^2}},$$

et, en élevant encore au carré et supprimant le terme commun $\frac{1}{x^4}$,

$$\frac{4}{ax^3}+\frac{4}{a^2x^2}=\frac{1}{a^2x^2};$$

en multipliant les deux membres de cette équation par x^2, elle devient du premier degré et se résoudra sans difficulté.

XVI.

En multipliant les deux membres par $\sqrt{x+\sqrt{x}}$, il vient

$$x+\sqrt{x}-\sqrt{x^2-x}=\tfrac{3}{2}\sqrt{x},$$

si on divise par $\sqrt{x}$,

$$\sqrt{x}+1-\sqrt{x-1}=\tfrac{3}{2},$$

ou

$$\sqrt{x-1}=\tfrac{1}{2}-\sqrt{x},$$

en élevant au carré

$$x-1=\tfrac{1}{4}-\sqrt{x}+x,$$

d'où

$$\sqrt{x}=\tfrac{5}{4}.$$

XVII.

En faisant passer a dans le premier membre, et élevant au carré, il vient

$$x^2+2ax+a^2=x^2-\sqrt{a^2+x^2},$$

ou

$$2ax+a^2=-\sqrt{a^2+x^2};$$

élevant encore au carré

$$4a^2x^2+a^4+4a^3x=a^2+x^2,$$

équation du second degré. (Cet Exercice devrait être placé après le chapitre VIII.)

XVIII.

En chassant le dénominateur, il vient

$$2x\sqrt{a^2+x^2}+2a^2+2x^2=5a^2,$$

ou

$$2x\sqrt{a^2+x^2}=3a^2-2x^2,$$

en élevant au carré

$$4x^2(a^2+x^2)=9a^4-12a^2x^2+4x^4,$$

ou

$$16a^2x^2=9a^4,$$

$$x^2=\tfrac{9}{16}a^2,$$

$$x=\tfrac{3}{4}a.$$

XIX.

L'équation peut s'écrire

$$(a+x)^{1+\frac{1}{n}}=\frac{ax^{1+\frac{1}{n}}}{c},$$

élevant les deux membres à la puissance $\frac{n}{n+1}$, il vient

$$a+x=\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{n}{n+1}}x.$$

XX.

Soit x la distance du point X à la dernière pierre, le chemin à faire dans le premier cas, en prenant pour unité la distance qui sépare deux pierres consécutives, est

$$n-1+x+2[(x+n-2)+(x+n-3)+\ldots+x]\pm n-1+x$$
$$+(2x+n-2)(n-1)=(2n-1)x+(n-1)^2,$$

1 2 3 4 n X

et, dans le second cas, le chemin est

$$2(1+2+3+\ldots+n-1)=n(n-1).$$

L'équation du problème est donc

$$(2n-1)x+(n-1)^2=2n(n-1),$$

d'où l'on tire facilement

$$x=\frac{(n-1)(n+1)}{2n-1}.$$

Digitized by Google

XXI.

Soit x le nombre de femmes cherché.

L'ouvrage d'un homme en un jour est $\frac{m}{na}$;

L'ouvrage d'une femme $\frac{m}{nb}$;

L'ouvrage de $a-p$ hommes en $n-p$ jours est $(n-p)(a-p)\frac{m}{na}$;

L'ouvrage de x femmes en $n-p$ jours $(n-p)x\frac{m}{nb}$, et l'équation du problème est

$$(n-p)(a-p)\frac{m}{na}+(n-p)x\frac{m}{nb}=m+p,$$

on en déduit $x=\frac{pb}{a}\left(1+\frac{m+n}{n-p}\cdot\frac{a}{m}\right)$.

CHAPITRE V.

I.

Les nombres demandés sont 4 et 6.

II.

Les nombres demandés sont 28 et 21.

III.

Les nombres demandés sont 2 et 10.

Digitized by Google

IV.

En nommant les trois nombres $x-y$, x, $x+y$, les équations du problème sont

$$[1] \qquad x-y : x+y :: 5 : 9,$$

$$[2] \qquad 3x = 63.$$

De la proportion [1] on déduit

$$x : y :: 14 : 4,$$

et on trouve très-facilement :

$$x = 21,$$
$$y = 6.$$

V.

$$x = \frac{\rho\mu\nu}{bc},$$

$$y = \frac{\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}},$$

$$z = \frac{\sqrt{\rho^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}},$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \mu^2 + \nu^2 + \rho^2 - b^2 - c^2.$$

VI.

Il faut résoudre les équations

$$(aq^{n-1} + bq_1^{n-1})x + (aq^{n-2} + bq_1^{n-2})y = aq^n + bq_1^n,$$
$$(aq^n + bq_1^n)x + (aq^{n-1} + bq_1^{n-1})y = aq^{n+1} + bq_1^{n+1}.$$

On trouve, toutes réductions faites,

$$x = q + q_1,$$
$$y = -qq_1.$$

Digitized by Google

VII.

Il faut résoudre les équations

$$(aq^{n-3}+bq_1^{n-3}+cq_2^{n-3})z+(aq^{n-2}+bq_1^{n-2}+cq_2^{n-2})y$$
$$+(aq^{n-1}+bq_1^{n-1}+cq_2^{n-1})x=aq^n+bq_1^n+cq_2^n,$$

$$(aq^{n-2}+bq_1^{n-2}+cq_2^{n-2})z+(aq^{n-1}+bq_1^{n-1}+cq_2^{n-1})y$$
$$+(aq^n+bq_1^n+cq_2^n)x=aq^{n+1}+bq_1^{n+1}+cq_2^{n+1},$$

$$(aq^{n-1}+bq_1^{n-1}+cq_2^{n-1})z+(aq^n+bq_1^n+cq_2^n)y$$
$$+(aq^{n+1}+bq_1^{n+1}+cq_2^{n+1})x=aq^{n+2}+bq_1^{n+2}+cq_2^{n+2}.$$

On trouve, toutes réductions faites,

$$z=qq_1q_2,$$
$$y=-qq_1-qq_2-q_1q_2,$$
$$x=q+q_1+q_2.$$

VIII.

$$x=-(a+b+c+d),$$
$$y=ab+ac+ad+bc+bd+cd,$$
$$z=-abc-abd-bcd-acd,$$
$$u=abcd.$$

IX.

Multiplions les équations par $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4,\ \lambda_5,\ \lambda_6,\ \lambda_7$.

Il faudra, pour avoir les valeurs de x, déterminer ces quantités par les conditions

$$\lambda_1+\lambda_2a+\lambda_3a^2+\lambda_4a^3+\lambda_5a^4+\lambda_6a^5+\lambda_7a^6=0,$$
$$\lambda_1+\lambda_2b+\lambda_3b^2+\lambda_4b^3+\lambda_5b^4+\lambda_6b^5+\lambda_7b^6=0,$$
$$\lambda_1+\lambda_2c+\lambda_3c^2+\lambda_4c^3+\lambda_5c^4+\lambda_6c^5+\lambda_7c^6=0,$$
$$\lambda_1+\lambda_2d+\lambda_3d^2+\lambda_4d^3+\lambda_5d^4+\lambda_6d^5+\lambda_7d^6=0,$$
$$\lambda_1+\lambda_2e+\lambda_3e^2+\lambda_4e^3+\lambda_5e^4+\lambda_6e^5+\lambda_7e^6=0,$$
$$\lambda_1+\lambda_2f+\lambda_3f^2+\lambda_4f^3+\lambda_5f^4+\lambda_6f^5+\lambda_7f^6=0,$$

Digitized by Google

et pour cela, nous prendrons pour ces quantités les coefficients des diverses puissances de s dans le produit

$$(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)(s-e)(s-f).$$

On aura, en observant que $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_7$ est ce que devient cette expression quand on suppose $s=1$,

$$x=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6+\lambda_7}=\frac{abcdef}{(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)(1-e)(1-f)}.$$

On verra de même que, pour trouver y, il faut adopter comme multiplicateurs les coefficients des diverses puissances de s dans le produit

$$(s-1)(s-b)(s-c)(s-d)(s-e)(s-f),$$

et l'on trouvera

$$y=\frac{bcdef}{(a-1)(a-b)(a-c)(a-d)(a-e)(a-f)},$$

et, par un procédé analogue,

$$z=\frac{acdef}{(b-1)(b-a)(b-c)(b-d)(b-e)(b-f)},$$

$$u=\frac{abdef}{(c-1)(c-a)(c-b)(c-d)(c-e)(c-f)},$$

$$v=\frac{abcef}{(d-1)(d-a)(d-b)(d-c)(d-e)(d-f)},$$

$$w=\frac{abcdf}{(e-1)(e-a)(e-b)(e-c)(e-d)(e-f)},$$

$$t=\frac{abcde}{(f-1)(f-a)(f-b)(f-c)(f-d)(f-e)}.$$

X.

La vérification n'offre aucune difficulté; c'est un pur exercice de calcul.

XI.

La vérification se fait également sans difficulté.

Digitized by Google

XII.

$$z = d\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{c}},$$

$$y = d\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{b}},$$

$$x = d\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{a}},$$

$$ax^2+by^2+cz^2 = (a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}})^3 d^2.$$

XIII.

On déduit du troisième groupe d'équations :

$$\left(\frac{y}{b}\right)^m = \frac{b^n}{a^n}\left(\frac{x}{a}\right)^m,$$

$$\left(\frac{z}{c}\right)^m = \frac{c^n}{a^n}\left(\frac{x}{a}\right)^m.$$

Le premier donne, par suite,

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m = \frac{a^n}{a^n+b^n+c^n} = \frac{a^n}{d^n};$$

on en déduit : $\left(\frac{x}{d}\right)^m = \left(\frac{a}{d}\right)^{m+n}$

et $\left(\frac{x}{d}\right)^{\frac{mn}{m+n}} = \left(\frac{a}{d}\right)^n;$

on trouvera de même

$$\left(\frac{y}{d}\right)^{\frac{mn}{m+n}} = \left(\frac{b}{d}\right)^n,$$

$$\left(\frac{z}{d}\right)^{\frac{mn}{m+n}} = \left(\frac{c}{d}\right)^n,$$

et, en ajoutant,

$$\left(\frac{x}{d}\right)^{\frac{mn}{m+n}} + \left(\frac{y}{d}\right)^{\frac{mn}{m+n}} + \left(\frac{z}{d}\right)^{\frac{mn}{m+n}} = 1,$$

ou

$$x^{\frac{mn}{m+n}} + y^{\frac{mn}{m+n}} + z^{\frac{mn}{m+n}} = d^{\frac{mn}{m+n}}.$$

XIV.

Soit x la longueur cherchée, y le retard du second train sur le premier.

Le temps que le premier train emploie à faire le trajet est $\frac{x}{v}$;

Le temps que le second train doit employer au même trajet est $\frac{x}{v'}$;

on doit avoir

$$\frac{x}{v} - \frac{x}{v'} = y.$$

Le temps nécessaire au second train pour arriver au lieu de leur rencontre est $\frac{x-a}{v'}$;

Le temps après lequel le premier train ralentit sa vitesse est $\frac{2x}{3v}$;

Le temps écoulé entre ce ralentissement et la rencontre

$$\left(\frac{x}{3} - a\right) : \frac{v}{2},$$

et l'on doit avoir .

$$y + \frac{x-a}{v'} = \frac{2x}{3v} + \left(\frac{x}{3} - a\right) : \frac{v}{2}.$$

On trouve alors sans difficulté :

$$x = 3\left(2 - \frac{v}{v'}\right)a,$$

$$y = 3 \cdot \frac{v' - v}{vv'} \cdot \left(2 - \frac{v}{v'}\right)a.$$

Digitized by Google

XV.

En prenant l'ouvrage en question pour *unité d'ouvrage*, et nommant x le temps que A emploierait à le faire seul, y et z les temps analogues pour B et C, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$ sont les quantités d'ouvrage fait, en un jour, par A, B, C. On a

[1] $$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{m}{x},$$

[2] $$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{n}{y},$$

[3] $$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{p}{z}.$$

De [1] et [2] on déduit :

[4] $$\frac{x}{y}=\frac{m+1}{n+1},$$

[5] $$\frac{x}{z}=\frac{m+1}{p+1},$$

et, par suite,

[6] $$\frac{y}{z}=\frac{n+1}{p+1}.$$

Si l'on tire de [5] et [6] les valeurs de x et y, et qu'on les remette dans [3], il vient, en supprimant le facteur $\frac{1}{z}$,

$$\frac{p+1}{m+1}+\frac{p+1}{n+1}=p,$$

ou $$\frac{1}{m+1}+\frac{1}{n+1}=\frac{p}{p+1}=1-\frac{1}{p+1},$$

et, par suite, $$\frac{1}{m+1}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{p+1}=1,$$

ce qui est la relation demandée.

Digitized by Google

XVI.

Soit A le premier terme et B la raison de la progression par différence.

$$a = A + (p-1)B,$$
$$b = A + (q-1)B,$$
$$c = A + (r-1)B.$$

Pour avoir la relation demandée, il faut éliminer A et B : on trouve

$$(q-r)a + (r-p)b + (p-q)c = 0.$$

Si la progression est par quotient, en nommant A le premier terme et R la raison, on aura

$$a = AR^{p-1},$$
$$b = AR^{q-1},$$
$$c = AR^{r-1}.$$

On en conclut $\frac{a}{b} = R^{p-q}, \quad \frac{b}{c} = R^{q-r}$;

et par suite $R = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p-q}}$,

$$R = \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{1}{q-r}};$$

ou, en égalant les valeurs de R,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p-q}} = \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{1}{q-r}},$$

que l'on peut écrire

$$a^{q-r} \cdot b^{r-p} \cdot c^{p-q} = 1.$$

CHAPITRE VI.

I.

Nommons K la valeur de $\frac{Ax + B}{A'x + B'}$, on aura

$$Ax + B = K(A'x + B').$$

Pour que cette équation soit satisfaite, quel que soit x, il faut que l'on ait

$$A = KA',$$
$$B = KB',$$

et, par suite,
$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = K.$$

Rémarque. On satisfait encore aux conditions proposées en prenant

$$B = B' = 0,$$

quels que soient les nombres A et A'.

II.

Pour que $\frac{Ax + By + C}{A'x + B'y + C'}$ soit indépendant de x, il faut (Exercice I) que

$$\frac{A}{A'} = \frac{By + C}{B'y + C'};$$

et, par suite, que le second membre soit indépendant de y, ce qui n'aura lieu que si l'on a

$$\frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{A}{A'}.$$

Telle est donc la condition pour que la fraction soit indépendante de x. On voit que si elle est remplie, la fraction sera aussi indépendante de y.

III.

Soit a le premier terme et r la raison, la somme des x premiers termes est

$$\frac{[2a + (x - 1)r]x}{2}.$$

Digitized by Google

La somme des $(k+1)x$ premiers termes est

$$\frac{\{2a+[(k+1)x-1]r\}(k+1)x}{2}.$$

Il faut évidemment, d'après l'énoncé, que le rapport de ces deux expressions

$$\frac{(2a+rx-r)}{[2a+(k+1)rx-r](k+1)}$$

soit indépendant de x. Or, cela exige (Exercice I), que

$$\frac{2a-r}{(2a-r)(k+1)}=\frac{r}{r(k+1)^2},$$

c'est-à-dire $$\frac{1}{k+1}=\frac{1}{(k+1)^2},$$

égalité impossible, à moins que l'on n'ait $k=0$.

Mais on peut satisfaire (exercice I, remarque) en posant $2a-r=0$, car alors le rapport [1] devient

$$\frac{r}{(k+1)^2r}=\frac{1}{(k+1)^2},$$

et il est évidemment indépendant de x.

Les progressions demandées sont donc celles dont la raison est double du premier terme.

IV.

Soient les équations

$$ax+by+cz=d,$$
$$a'x+b'y+c'z=d',$$
$$a''x+b''y+c''z=d''.$$

Pour que les deux premières équations soient incompatibles, quelle que soit la troisième, il faut (65) que

$$ab'-ba'=0,$$

$(d-cz)b'-(d'-c'z)b$, diffèrent de zéro.

Digitized by Google

Or, cette seconde condition ne peut être remplie que si l'on a

$$b'c - bc' = 0,$$

et $$db' - bd' \text{ différent de zéro.}$$

Pour que la troisième équation soit incompatible avec les deux autres, il faut qu'en déduisant de celles-ci les valeurs de y et z, et les remettant dans la troisième, on trouve une équation impossible, telle que

$$0 \times x = A,$$

A n'étant pas nul. Les conditions que doivent remplir les coefficients, sont

$$a''bc' - a''b'c + b''a'c - b''c'a + c''ab' - c''ba' = 0,$$
$$d''bc' - d''b'c + b''d'c - b''c'd + c''db' - c''bd', \text{ différent de zéro.}$$

Pour que les deux premières équations rentrent l'une dans l'autre, il faut (66) que

$$ab' - ba' = 0,$$
$$(d - cz)b' - (d' - c'z)b = 0.$$

Cette seconde équation devant avoir lieu quel que soit z, exige que

$$db' - bd' = 0,$$
$$bc' - b'c = 0.$$

Enfin, pour que la troisième rentre dans les deux autres, on doit avoir

$$a''bc' - a''b'c + b''a'c - b''c'a + c''ab' - c''ba' = 0,$$
$$d''bc' - d''b'c + b''d'c - b''c'd + c''db' - c''bd' = 0.$$

V.

Les équations du problème sont, en nommant x ce que verse un robinet, dans l'unité de temps, et y ce que verse la pluie, dans l'unité de temps, sur l'unité de surface,

$$ntx + sty = v,$$
$$n't'x + s't'y = v'.$$

Digitized by Google

On en déduit $$x = \frac{vs't' - v'st}{nts't' - n't'st},$$

$$y = \frac{v'nt - vn't'}{nts't' - n't'st}.$$

Le problème est impossible si l'on a

$$nts't' = n't'st,$$

mais il devient indéterminé si l'on a en même temps

$$vs't' = v'st.$$

La condition d'impossibilité peut s'écrire, en supprimant le facteur tt',

$$\frac{n}{n'} = \frac{s}{s'}.$$

Elle exprime alors que le nombre de robinets dans les deux vases est proportionnel aux surfaces; dans ce cas, le rapport de la quantité d'eau versée en un même temps dans l'un et l'autre vase est évidemment, quelles que soient les valeurs de x et de y, égal à la valeur commune de $\frac{n}{n'}$ et de $\frac{s}{s'}$; en sorte que, connaissant le temps t que l'un des vases met à se remplir, on peut calculer, par une règle de trois, le temps t' nécessaire pour remplir l'autre; et si la valeur donnée de t' ne coïncide pas avec la valeur ainsi calculée, le problème est impossible. Si, au contraire, ces deux valeurs sont égales, les deux conditions données rentrent l'une dans l'autre, et le problème est indéterminé.

CHAPITRE VII.

I.

Le point X est à une distance du point O égale à $\frac{a+b+c+d+\dots}{n}$

n étant le nombre des points donnés. Cette formule s'étend à

Digitized by Google

tous les cas, pourvu que l'on considère comme négatives les distances comptées à gauche de O.

II.

La géométrie donne finalement la solution :

$$[1] \qquad x : x-h :: a : b,$$

$$(a-b)x = ah,$$

$$x = \frac{ah}{a-b}.$$

Si a est moindre que b, la solution est négative. La base a est alors la plus rapprochée du sommet du triangle, et l'on a, en nommant x la distance du sommet à cette base,

$$[2] \qquad x : x+h :: a : b,$$

ce qui équivaut à $-x : -x-h :: a : b$,

équation obtenue en changeant dans [1] x en $-x$. La solution de [1] sera donc fournie par celle de [2] prise positivement.

III.

En nommant x la base et y la hauteur du rectangle cherché, et $2p$ le périmètre du rectangle, on a

$$x+y=p,$$

et la géométrie fournit, en outre, la proportion

$$b : x :: h : h-y.$$

En résolvant ces équations, on trouve :

$$x=\frac{b(h-p)}{h-b},$$

$$y=\frac{h(p-b)}{h-b}.$$

Pour que les inconnues soient toutes deux positives, il faut que p soit compris entre b et h. Si $h=b$, le problème est impossible, à moins que p ne leur soit égal, auquel cas il devient indéterminé.

1° Supposons $h>b$ et $p<b$; y est alors négatif et x positif. Si l'on nomme β la valeur de y et α celle de x, β et α satisfont alors aux relations :

$$\alpha-\beta=p,$$
$$b:\alpha::h:h+\beta.$$

α et β sont les deux côtés d'un rectangle dont la différence est égale à la ligne donnée p, dont l'une des bases coïncide en direction avec la base b du triangle, et dont les deux sommets sont situés sur les côtés prolongés en dessous de la base.

2° Si l'on a $h>b$, $p>h$, y est positif et x négatif; les valeurs trouvées, prises positivement, correspondent alors à un rectangle dont la différence des côtés est p, et dont deux sommets sont situés sur les côtés du triangle donné, prolongés au-dessus de son sommet.

3° Si l'on a $h<b$ et $p>b$, y est négatif, et l'interprétation est la même que dans le premier cas.

4° Enfin, pour $h<b$, $p<h$, l'interprétation est la même que dans le second cas.

IV.

1 2 3 n X

En supposant que le point X soit à droite de la n^{me} pierre, à une distance x, on trouvera pour équation du problème :

$$2m[1+2+3+\ldots+(n-1)]=(n-1+x)$$
$$+2[(n+x-2)+(n+x-3)+\ldots+x],$$

ou $$mn(n-1)=n-1+x+n(n-1)(n+2x-2);$$

on en conclut :

$$x=\frac{mn(n-1)-(n-1)^2}{2n-1}.$$

Si l'on a $$mn(n-1)-(n-1)^2<0,$$

c'est-à-dire $$m<\frac{1}{n},$$

la valeur de x est négative.

Digitized by

Pour voir si l'on peut l'interpréter, il faut voir si (70) l'équation

$$[1] \qquad 2m(1+2+3+\ldots+n-1)=n-1-x$$
$$+2(n-x-2+n-x-3+\ldots-x)$$

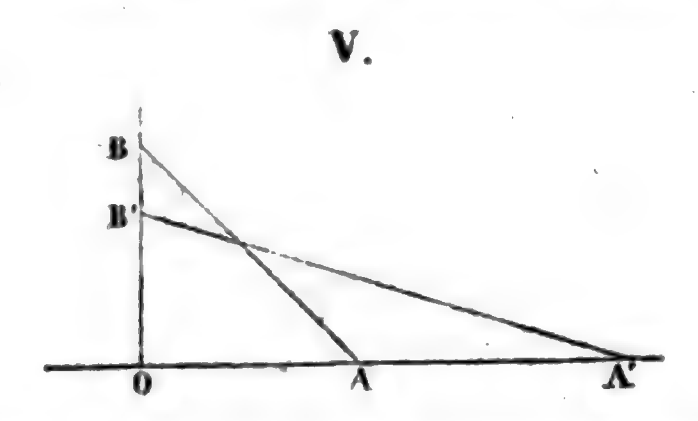
correspond à un problème analogue au proposé.

Or cela n'a pas lieu. Si, en effet, on supposait le point X placé à gauche de la n^{me} pierre, l'équation du problème serait

$$[2] \qquad 2m(1+2+3+\ldots+n-1)=n-x-1$$
$$+2[n-x-2+\ldots n-x-p+x-(n-p-1)+x-(n-p-2)+\ldots+x]$$

p désignant le rang de la première pierre située à droite de X. Les équations [1] et [2] ne coïncidant pas, on voit que, dans ce cas, la solution négative ne doit pas être portée à gauche.

V.



En nommant y et x les perpendiculaires cherchées, la géométrie donne facilement :

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

$$\frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}=1;$$

on en conclut les valeurs de x et de y. Ces valeurs conviennent lors même qu'elles sont négatives, pourvu qu'on porte les valeurs négatives de x à gauche de OA, et les valeurs négatives de y au-dessous de OB.

Digitized by Google

CHAPITRE VIII.

I.

En nommant x' et x'' les racines de l'équation, on a

$$x'^2 + x''^2 = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a},$$

$$x'^3 + x''^3 = -\frac{b^3}{a^3} + \frac{3bc}{a^2},$$

$$x'^4 + x''^4 = \frac{b^4}{a^4} - \frac{4b^2c}{a^3} + \frac{2c^2}{a^2},$$

$$\frac{1}{x'^4} + \frac{1}{x''^4} = \frac{b^4}{c^4} - \frac{4b^2a}{c^3} + \frac{2a^2}{c^2}.$$

II.

$\dfrac{Ax^2 + Bx + C}{A'x^2 + B'x + C'}$ ne peut avoir une valeur K, indépendante de x, que si l'équation

$$Ax^2 + Bx + C = K(A'x^2 + B'x + C')$$

admet une infinité de racines. Or cela est impossible, si l'on n'a pas

$$A = KA',$$

$$B = KB',$$

$$C = KC',$$

et, par suite,

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}.$$

III.

Si ces trois fractions sont égales à un même nombre K, l'équation

$$Ax^2 + Bx + C = K(A'x^2 + B'x + C')$$

Digitized by Google

admet trois racines x, y, z, ce qui est impossible si x, y, z sont différentes, à moins que l'on n'ait

$$A = KA', \quad B = KB', \quad C = KC',$$

et, par suite, $$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}.$$

IV.

Pour que la fraction proposée

$$\frac{Ay^2 + (Bx + D)y + Cx^2 + Ex + F}{A'y^2 + (B'x + D')y + C'x^2 + E'x + F'},$$

soit indépendante de y, il faut, d'après ce qui précède, que l'on ait

$$\frac{A}{A'} = \frac{Bx + D}{B'x + D'} = \frac{Cx^2 + Ex + F}{C'x^2 + E'x + F'};$$

les fractions $$\frac{Bx + D}{B'x + D'}, \quad \frac{Cx^2 + Ex + F}{C'x^2 + E'x + F'}$$

doivent donc être indépendantes de x, et, par suite, on conclut de ce qui précède

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{D}{D'} = \frac{C}{C'} = \frac{E}{E'} = \frac{F}{F'}.$$

Nous laissons au lecteur le soin d'examiner le cas où A et A' sont nuls : le raisonnement précédent est alors en défaut, mais la conclusion subsiste.

V.

Soit d la distance de B à C, et v, v' les deux vitesses; la rencontre se fera après un temps égal à

$$\frac{d}{v + v'},$$

les espaces parcourus seront alors

$$\frac{vd}{v + v'}, \quad \frac{v'd}{v + v'},$$

et les espaces qui resteront à parcourir

$$\frac{v'd}{v+v'}, \quad \frac{vd}{v+v'}.$$

Les temps nécessaires pour ces parcours sont

$$\frac{v'd}{v(v+v')}, \quad \frac{vd}{v'(v+v')};$$

on doit donc avoir $$\frac{v'd}{v(v+v')}=4,$$

$$\frac{vd}{v'(v+v')}=9,$$

d'où l'on déduit $$\frac{v'^2}{v^2}=\frac{4}{9},$$

$$\frac{v'}{v}=\frac{2}{3}.$$

VI.

Si l'on pose $\sqrt[3]{x}=z$, cette équation devient

$$2z^4-3z^2=20,$$

et se résout à la manière des équations bicarrées.

VII.

Si l'on pose $2x^2+3x=z$, cette équation devient

$$z-5\sqrt{z+9}+3=0,$$

ou $$25(z+9)=(z+3)^2,$$

équation du second degré qui fera connaître z. On en déduira x en résolvant une seconde équation du second degré.

Digitized by Google

VIII.

Cette équation équivaut à

$$\frac{2\sqrt{2-x^2}}{2x^2-2}=1,$$

qui se résout sans difficulté.

IX.

En divisant par $\sqrt[m]{1-x^2}$, cette équation devient

$$\sqrt[m]{\frac{1+x}{1-x}}-\sqrt[m]{\frac{1-x}{1+x}}=1;$$

ou, en posant $$\sqrt[m]{\frac{1+x}{1-x}}=z,$$

$$z-\frac{1}{z}=1,$$

équation du second degré d'où l'on déduira la valeur de z. On connaîtra alors $\frac{1+x}{1-x}$, et, par suite, x.

X.

Cette équation équivaut à

$$\frac{2\sqrt{1-x^2}}{x^2}=\frac{\sqrt{3}}{x^2},$$

ou à $$1-x^2=\tfrac{3}{4},$$

$$x^2=\tfrac{1}{4},$$

$$x=\pm\tfrac{1}{2}.$$

Digitized by Google

XI.

En posant $5x + x^2 = z$, cette équation devient :

$$\sqrt{z} = 42 - z,$$

et se résout sans difficulté.

XII.

$$\sqrt{x^2 + 5x + 1} - x = \frac{x^2 + 5x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 5x + 1} + x} = \frac{5x + 1}{\sqrt{x^2 + 5x + 1} + x}$$

$$= \frac{5 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1}.$$

La limite est $\frac{5}{2}$.

XIII.

$$a - \sqrt{a^2 - b} = \frac{b}{a + \sqrt{a^2 - b}} = \frac{1}{\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - \frac{1}{b}}}.$$

$\frac{b^2}{a}$ ayant une limite fixe, $\frac{b}{a}$ tend vers 0; par suite, $\frac{a}{b}$ croît indéfiniment, et la limite demandée est 0.

XIV.

Soient α la distance du centre au point O, et x sa distance à la perpendiculaire cherchée; m la tangente de l'angle formé par la droite considérée avec le diamètre CO; z' et z'' les distances des points A et B à une perpendiculaire au diamètre menée par le centre, et R le rayon du cercle : z' et z'' sont racines de l'équation :

$$m^2(z - \alpha)^2 + z^2 = R^2;$$

mais on a
$$p = x - z', \quad z' = x - p,$$
$$q = x - z'', \quad z'' = x - q;$$

p et q sont donc racines de l'équation :

$$m^2(x-v-\alpha)^2+(x-v)^2=R^2,$$

ou $$v^2(m^2+1)-v[2m^2(x-\alpha)+2x]+m^2(x-\alpha)^2+x^2-R^2=0.$$

La somme $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ est égale à

$$\frac{2m^2(x-\alpha)+2x}{m^2(x-\alpha)^2+x^2-R^2}.$$

Ce rapport doit être indépendant de m, et, par suite, on doit avoir :

$$\frac{2(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2}=\frac{2x}{x^2-R^2}.$$

On y peut satisfaire en posant :

$$x=\alpha,$$

ou $$2(x^2-R^2)=2x(x-\alpha),$$

$$-R^2=-2\alpha x,$$

$$x=\frac{R^2}{\alpha}.$$

XV.

Soit d la distance des centres ; x la distance du point cherché à l'un des centres ; $x+d$ la distance à l'autre ; R et R′ les rayons des deux cercles ; α la distance du pied de la perpendiculaire considérée au centre du premier cercle ; $\alpha+d$ la distance au centre du second. L'expression

$$\frac{R^2-\alpha^2+(x-\alpha)^2}{R'^2-(\alpha+d)^2+(x+d-\alpha)^2}$$

doit être indépendante de α ; on en conclut :

$$\frac{2x}{2(x+d)+2d}=\frac{R^2+x^2}{R'^2-d^2+(x+d)^2},$$

équation qui devient du second degré après qu'on a chassé les dénominateurs et supprimé les termes communs. Nous laissons au lecteur le soin de faire la discussion et d'interpréter les solutions négatives.

XVI.

L'équation peut se mettre sous la forme

$$a^2b^2x^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} - 4(ab)^{\frac{3}{2}}x^{\frac{p+q}{2pq}-\frac{1}{p}} = a^2b^3,$$

ou, en posant
$$x^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} = z^2,$$
$$x^{\frac{p+q}{2pq}-\frac{1}{p}} = z,$$

$$a^2b^2z^2 - 4(ab)^{\frac{3}{2}}z = a^2b^3,$$

équation du second degré qui se résoudra sans difficulté.

XVII.

Il faut lire

$$\sqrt[2pq]{x^{p+q}} - \frac{1}{2}\,\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}(\sqrt[p]{x} + \sqrt[q]{x}) = 0.$$

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$x^{\frac{p+q}{2pq}-\frac{1}{q}} - \frac{1}{2}\,\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\,x^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} - \frac{1}{2}\,\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = 0.$$

Elle se résoudra en posant

$$x^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} = z^2,$$
$$x^{\frac{p+q}{2pq}-\frac{1}{q}} = z.$$

XVIII.

Il vient, en chassant les dénominateurs,

$$27a + 48x = 24x^{\frac{2}{3}}(27a + 8x)^{\frac{1}{3}},$$

ou, en posant
$$9a = b,\quad 8x = y,$$

$$b + 2y = 2y^{\frac{2}{3}}(3b + y)^{\frac{1}{3}};$$

en élevant les deux membres au cube :

$$b^3+6b^2y+12by^2+8y^3=24by^2+8y^3,$$

équation qui devient du second degré si l'on supprime le terme $8y^3$, commun aux deux membres.

XIX.

Cette équation peut s'écrire :

$$\frac{x^2}{8a}+2a\left(\frac{x}{3a}+\frac{1}{4}\right)=x\sqrt{\frac{x}{3a}+\frac{1}{4}},$$

ou

$$\left[\frac{x}{2\sqrt{2a}}-\sqrt{2a\left(\frac{x}{3a}+\frac{1}{4}\right)}\right]^2=0,$$

$$\frac{x}{2\sqrt{2a}}=\sqrt{2a\left(\frac{x}{3a}+\frac{1}{4}\right)},$$

qui se résout sans difficulté.

CHAPITRE IX.

I.

La seconde équation donne :

$$y^n=a^nb^nx^{-n},$$

ce qui met la première sous la forme

$$a^nx^m+a^nb^{m+n}x^{-n}=2a^{\frac{m+n}{2}}b^nx^{\frac{m-n}{2}};$$

d'où

$$x^{m+n}+b^{m+n}=2a^{\frac{m-n}{2}}b^nx^{\frac{m+n}{2}},$$

équation qui devient du second degré si l'on pose $x^{\frac{m+n}{2}}=z$.

Digitized by Google

II.

Soient x, y, u, v les côtés des deux rectangles, on a

[1] $$xy + uv = q,$$

[2] $$x + u = a,$$

[3] $$xv = p,$$

[4] $$yu = p'.$$

En ajoutant les équations [1], [3] et [4], il vient :

[5] $$(x+u)(y+v) = q + p + p',$$

et en divisant par [2] :

[6] $$y + v = \frac{q+p+p'}{a}, \quad v = \frac{q+p+p'}{a} - y.$$

L'équation [4] donne : $u = \frac{p'}{y}$.

L'équation [2] donne :

$$x = a - u = a - \frac{p'}{y}.$$

Remettant les valeurs de v et x dans [3], il vient :

$$\left(a - \frac{p'}{y}\right)\left(\frac{q+p+p'}{a} - y\right) = p,$$

équation qui se résout sans difficulté. y étant connu, les autres inconnues s'obtiennent immédiatement.

Digitized by Google

111.

Soit $$a : aq : aq^2 : \ldots : aq^n,$$

la progression, S_1 la somme des termes, S_2 la somme de leurs carrés, S_3 celle de leurs cubes, on a

$$[1] \qquad S_1 = \frac{aq^{n+1} - a}{q - 1},$$

$$[2] \qquad S_2 = \frac{a^2q^{2n+2} - a^2}{q^2 - 1},$$

$$[3] \qquad S_3 = \frac{a^3q^{3n+3} - a^3}{q^3 - 1}.$$

En divisant [2] et [3] par [1]

$$[4] \qquad \frac{S_2}{S_1} = \frac{a(q^{n+1} + 1)}{q + 1},$$

$$[5] \qquad \frac{S_3}{S_1} = \frac{a^2(q^{2n+2} + q^{n+1} + 1)}{q^2 + q + 1};$$

mais on déduit de [1]

$$q^{n+1} = \frac{(q-1)S_1 + a}{a},$$

$$q^{2n+2} = \frac{[(q-1)S_1 + a]^2}{a^2}.$$

Ces valeurs substituées dans [4] et [5], donnent

$$[6] \qquad \frac{S_2}{S_1} = \frac{(q-1)S_1 + 2a}{q + 1},$$

$$[7] \qquad \frac{S_3}{S_1} = \frac{[(q-1)S_1 + a]^2 + a[(q-1)S_1 + a] + a^2}{q^2 + q + 1},$$

ou

$$[8] \qquad \frac{S_3}{S_1} = \frac{3a^2 + 3(q-1)S_1a + (q-1)^2S_1^2}{q^2 + q + 1}.$$

On déduit de [6]

$$a = \frac{(q+1)\dfrac{S_2}{S_1} - (q-1)S_1}{2}.$$

Substituant cette valeur dans [8], il vient une équation du second degré en q.

Connaissant q, les calculs précédents font connaître a et q'', par suite n.

Le produit des racines de l'équation en q est l'unité. Le lecteur cherchera à expliquer cette circonstance.

IV.

En multipliant deux à deux les équations proposées, on obtient

$$x^2 = qq', \quad z^2 = q'q'', \quad y^2 = qq''.$$

V.

En retranchant successivement chacune des trois équations données de la somme des deux autres, on obtiendra xy, xz, yz, soit

$$[1] \qquad xy = k, \quad xz = k', \quad yz = k''.$$

En multipliant ces trois équations membre à membre, on aura

$$x^2y^2z^2 = kk'k'',$$

$$[2] \qquad xyz = \sqrt{kk'k''};$$

et, en divisant [2] par chacune des équations [1], on obtiendra x, y et z.

VI.

Si l'on pose $xy = u$, $x + y = v$, on a deux équations du premier degré qui font connaître u et v. La détermination de x et de y ne présente ensuite aucune difficulté.

VII.

Soit $z^2 + pz + q = 0$, l'équation du second degré, dont x et y sont les racines. On a (Exercice I, chapitre VIII),

$$-p = a,$$
$$p^4 + 2q^2 - 4p^2q = d^4.$$

La première de ces équations fait connaître p, et la seconde permet de calculer q.

VIII.

En divisant membre à membre les équations proposées, il vient

$$\frac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{a + x} = \frac{x + y}{y\sqrt{x}},$$

ou $$y\sqrt{xy} - xy = (a + x)(x + y);$$

mais on déduit de la première équation

$$y = \frac{a^2 - x^2}{3x};$$

en substituant, il vient

$$\frac{(a^2 - x^2)}{3x}\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{3}} = \frac{a^2 - x^2}{3} + (a + x)\frac{a^2 + 2x^2}{3x},$$

ou, en divisant par $a + x$ et multipliant par x,

$$(a - x)\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{3}} = a^2 + ax + x^2,$$

ou, en élevant au carré et réduisant,

$$4x^4 + 4ax^3 + 9a^2x^2 + 8a^3x + 2a^4 = 0,$$

c'est-à-dire

$$4x^2(x^2 + 2a^2) + a^2(x^2 + 2a^2) + 4ax(x^2 + 2a^2) = 0,$$

Digitized by Google

qui peut se séparer en deux :

$$x^2 + 2a^2 = 0,$$

$$4x^2 + a^2 + 4ax = 0;$$

on en déduit $x = \pm a\sqrt{-2}, \; x = -\frac{a}{2}.$

IX.

Posons $\sqrt{x} = u, \; \sqrt{y} = v.$ Les équations deviennent

$$\frac{u}{v} + \frac{v}{u} = \frac{61}{uv} + 1,$$

$$(u+v)\sqrt{uv} = 78.$$

La première équation peut s'écrire

$$(u^2 + v^2) = 61 + uv.$$

Si l'on pose $u + v = u_1, \; uv = v_1^2,$ il vient

$$u_1 v_1 = 78,$$

$$u_1^2 - 2v_1^2 = 61 + v_1^2,$$

et de ces deux équations on déduira facilement u_1 et v_1.

X.

En élevant au carré les deux membres de la première équation, et remplaçant xy par $4ab$,

$$y^2(ax + bx - ab) + x^2(ab - ay - by)$$
$$= 4[b^2(xy - ay - ax) + a^2(bx - yx + by)],$$

que l'on peut écrire

$$(x^2 - y^2)ab - (a+b)xy(x-y) = 4xy(b^2 - a^2) - 4ab(b-a)(x-y),$$

ou $ab(x-y)[x+y-4(a+b)] = 4ab(a-b)[x+y-4(a+b)].$

On peut y satisfaire en posant

$$x - y = 4(a - b),$$

ou

$$x + y = 4(a + b).$$

Ces équations, jointes à $xy = 4ab$, permettent d'achever la solution.

XI.

On déduit des égalités données :

$$x+y : x+z : y+z :: \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c},$$

$$2x : 2z : 2y :: \frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c} : \frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a} : \frac{1}{a}+\frac{1}{c}-\frac{1}{b}.$$

Connaissant ainsi les rapports $\frac{z}{x}$, $\frac{y}{x}$, soient $z = \mathrm{K}x$, $y = \mathrm{K}'x$, l'une des équations données devient

$$\frac{\mathrm{KK}'x^3}{x(\mathrm{K}+\mathrm{K}'+1)} = a,$$

$$x^2 = \frac{a(\mathrm{K}+\mathrm{K}'+1)}{\mathrm{KK}'};$$

d'où l'on déduira x et, par suite, y et z.

XII.

Soient a, aq, aq^2, aq^3 les quatre nombres en progression; S_1, S_2 les sommes données : on a

[1] $$\frac{a(q^4-1)}{q-1} = S_1,$$

[2] $$\frac{a^2(q^8-1)}{q^2-1} = S_2.$$

En divisant [2] par le carré de [1],

$$\frac{(q^4+1)(q-1)}{(q^4-1)(q+1)} = \frac{S_2}{S_1^2},$$

ou, en remplaçant $\frac{q-1}{q^4-1}$ par $\frac{1}{q^3+q^2+q+1}$,

$$\frac{q^4+1}{(q+1)(q^3+q^2+q+1)} = \frac{S_2}{S_1^2},$$

$$q^4\left(1-\frac{S_2}{S_1^2}\right) - 2q^3\frac{S_2}{S_1^2} - 2q^2\frac{S_2}{S_1^2} - 2q\frac{S_2}{S_1^2} + 1 - \frac{S_2}{S_1^2} = 0,$$

Digitized by Google

ou, en divisant par q^2,

$$\left(1-\frac{S_2}{S_1^2}\right)\left(q^2+\frac{1}{q^2}\right)-2\frac{S_3}{S_1^2}\left(q+\frac{1}{q}\right)-2\frac{S_2}{S_1^2}=0;$$

et si l'on pose
$$q+\frac{1}{q}=z,$$
$$q^2+\frac{1}{q^2}=z^2-2,$$

cette équation devient du second degré en z. La solution s'achève facilement.

XIII.

x et y étant les deux chiffres, on a

$$\frac{10x+y}{xy}=5+\frac{1}{3},$$
$$10x+y-9=10y+x;$$

équations dont la solution ne présente aucune difficulté.

XIV.

x, y, z désignant les trois chiffres, on a

[1] $$y^2=xz,$$

[2] $$\frac{100x+10y+z}{x+y+z}=\frac{124}{7},$$

[3] $$100x+10y+z+594=100z+10y+x.$$

Les équations [2] et [3] sont du premier degré ; on en déduira x et z en fonction de y, et les remettant dans [1], on aura une équation du second degré qui fera connaître y.

XV.

Si on multiplie la première équation par $x+y$, elle devient
$$(x^2-y^2)+\sqrt{x^2-y^2}=20,$$
et peut faire connaître x^2-y^2.

Connaissant x^2-y^2 et $x^2+y^2=34$, la solution s'achève sans difficulté.

XVI.

Si on divise la première équation par xy, et la seconde par x^2y^2, il vient

$$(x+y)\left(1+\frac{1}{xy}\right)=18,$$

$$(x^2+y^2)\left(1+\frac{1}{x^2y^2}\right)=208,$$

où, en effectuant,

$$x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=18,$$

$$x^2+y^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=208.$$

Posant $$x+\frac{1}{x}=u,\quad x^2+\frac{1}{x^2}=u^2-2,$$

$$y+\frac{1}{y}=v,\quad y^2+\frac{1}{y^2}=v^2-2,$$

il vient $$v+u=18,$$

$$v^2+u^2=212,$$

d'où l'on déduira sans peine u et v, et par suite x et y.

XVII.

Posons $\sqrt{x}=u$, $\sqrt{y}=v$, il vient

$$u^{\sqrt{u}+\sqrt{v}}=v^{\frac{8}{3}}$$

$$v^{\sqrt{u}+\sqrt{v}}=u^{\frac{2}{3}},$$

on déduit de cette dernière

$$v=u^{\frac{2}{3(\sqrt{u}+\sqrt{v})}}.$$

$$v^{\frac{8}{3}}=u^{\frac{16}{9(\sqrt{u}+\sqrt{v})}}$$

Digitized by Google

égalant les deux valeurs de $v^{\frac{8}{3}}$,

$$u^{\frac{16}{9(\sqrt{u}+\sqrt{v})}} = u^{\sqrt{u}+\sqrt{v}};$$

donc
$$\frac{16}{9(\sqrt{u}+\sqrt{v})} = \sqrt{u}+\sqrt{v};$$

d'où l'on déduit

$$\sqrt{u}+\sqrt{v} = \tfrac{4}{3}.$$

Remettant cette valeur dans les équations proposées,

$$u^{\frac{4}{3}} = v^{\frac{8}{3}}$$

ou
$$u = v^2, \quad \sqrt{u} = v;$$

donc
$$v + \sqrt{v} = \tfrac{4}{3};$$

d'où l'on déduira sans peine la valeur de v.

XVIII.

La première équation peut s'écrire

$$(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}})(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} = a,$$

d'où l'on déduit
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}};$$

on a identiquement

$$(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})^3 = x + y + 3\sqrt[3]{xy}(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}),$$

équation qui coïncide avec la seconde des proposées, si l'on pose $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = b^{\frac{1}{3}}$. On peut donc écrire

$$x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = b^{\frac{1}{3}},$$

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

d'où l'on déduira facilement $x^{\frac{1}{3}}$ et $y^{\frac{1}{3}}$, par suite, x et y.

Remarque. Nous avons admis que les deux équations

$$(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})^3=x+y+3\sqrt[3]{xy}(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}),$$

$$b=x+y+3\sqrt[3]{xy}\sqrt[3]{b}$$

entraînent
$$b=(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})^3;$$

cela n'est pas rigoureusement exact; la réciproque seule est vraie; aussi, le procédé donne-t-il des solutions du système proposé, mais non pas toutes les solutions.

XIX.

Posant $x^{\frac{3}{2}}=x'$, $y^{\frac{3}{2}}=y'$, les équations proposées deviennent

$$x'+\sqrt{x'y'}+y'=a,$$

$$x'^2+x'y'+y'^2=b,$$

ou
$$x'+y'+\sqrt{x'y'}=a,$$

$$(x'+y')^2-x'y'=b;$$

en divisant ces équations membre à membre, il vient

$$x'+y'-\sqrt{x'y'}=\frac{b}{a},$$

et on trouve facilement

$$x'+y'=\frac{a+\frac{b}{a}}{2},$$

$$\sqrt{x'y'}=\frac{a-\frac{b}{a}}{2},$$

d'où l'on déduira sans peine x' et y'.

Digitized by Google

XX.

Ces équations peuvent s'écrire

$$\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}=a, \quad \frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}=b;$$

on en déduit
$$\frac{x^3+y^3}{x^3-y^3}=\frac{b}{a},$$

d'où l'on tirera
$$\frac{x^3}{y^3}=\frac{b+a}{b-a},$$

$$x=y\sqrt[3]{\frac{b+a}{b-a}}.$$

Cette valeur, remise dans l'une des deux proposées, donnera une équation du second degré en y.

XXI.

Soient $x-2y$, $x-y$, x, $x+y$, $x+2y$ les cinq nombres; leur somme est $5x$ et leur produit

$$(x^2-4y^2)(x^2-y^2)x;$$

x étant connu, en égalant ce produit au nombre donné, on aura une équation bicarrée en y.

XXII.

Soient $x-3y$, $x-y$, $x+y$, $x+3y$ les quatre nombres; on donne leur somme $4x$, et, par conséquent, x peut être regardé comme connu; l'équation à résoudre est alors

$$\frac{1}{x-3y}+\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+3y}=\mathrm{S},$$

ou, en groupant les termes,

$$\frac{2x}{x^2-9y^2}+\frac{2x}{x^2-y^2}=\mathrm{S},$$

ce qui, en chassant les dénominateurs, devient une équation bicarrée en y.

XXIII.

Il faut lire à la place de la première équation

$$(1-x^2)^2(1+y^2)-(1+x^2)^2(1-y^2)=4x^2\sqrt{1+y^4};$$

cette équation peut s'écrire

$$2y^2-4x^2+2x^4y^2=4x^2\sqrt{1+y^4},$$

ou

[1] $$y^2(1+x^4)=2x^2(1+\sqrt{1+y^4});$$

mais la seconde des équations proposées donne

$$(1-x^2)^2=\frac{8x^2y^2}{(1-y^2)^2},$$

et, par suite,

$$1+x^4=\frac{8x^2y^2}{(1-y^2)^2}+2x^2=\frac{2x^2(1+y^2)^2}{(1-y^2)^2}.$$

Substituant dans [1], il vient

$$\frac{y^2(1+y^2)^2}{(1-y^2)^2}=1+\sqrt{1+y^4},$$

qui devient, par des réductions faciles,

$$y^8+2y^4+1=\tfrac{4}{3},$$

d'où l'on déduit $$y=\pm\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}-1}.$$

y étant connu, la valeur de x s'obtiendra sans difficulté.

XXIV.

Divisant la première équation par $(xy)^2$, il vient

$$x^2y^2+2b(x^3+y^3)+4b^2xy+a^2\left(\frac{x^4}{y^2}+\frac{y^4}{x^2}\right)$$
$$+2a^2b\left(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\right)+a^4=4(a^2-b^2)(b+c)^2;$$

Digitized by Google

remplaçant x^3+y^3 par $2cxy$, $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}$ par $2c$, il vient

$$x^2y^2+(4bc+4b^2-2a^2)xy+a^2\left(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\right)^2$$
$$+4a^2bc+a^4=4(a^2-b^2)(b+c)^2,$$

ou, en remplaçant encore $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}$ par sa valeur connue,

$$x^2y^2+(4bc+4b^2-2a^2)xy+(2bc+2b^2-a^2)^2=0,$$

on en déduit $\qquad xy=a^2-2bc-2b^2=\mathrm{K};$

remplaçant dans la seconde équation x par $\frac{\mathrm{K}}{y}$ et posant $y^3=y'$, on aura une équation du second degré qui fournira la valeur de y', et par suite celles de x et de y :

$$y=\sqrt[3]{\mathrm{K}}\cdot\sqrt[3]{c\pm\sqrt{c^2-k}},$$
$$x=\frac{\sqrt[3]{\mathrm{K}^2}}{\sqrt[3]{c\pm\sqrt{c^2-k}}}.$$

CHAPITRE X.

I.

En chassant les dénominateurs, ce qui est permis, puisqu'ils sont positifs, et faisant passer tous les termes dans le premier membre, on trouve

$$(x+a)\sqrt{b^2+x^2}-(x+b)\sqrt{a^2+x^2}>0,$$

ou
$$\frac{(x+a)^2(b^2+x^2)-(x+b)^2(a^2+x^2)}{(x+a)\sqrt{b^2+x^2}+(x+b)\sqrt{a^2+x^2}}>0,$$

ou, en effectuant les calculs,

$$\frac{2(a-b)x(x-\sqrt{ab})(x+\sqrt{ab})}{(x+a)\sqrt{b^2+x^2}+(x+b)\sqrt{a^2+x^2}}>0$$

$a-b$ est positif par hypothèse; on reconnaît facilement que le dénominateur est toujours de même signe que $x+\sqrt{ab}$. L'inégalité à laquelle on doit satisfaire revient donc à

$$x(x-\sqrt{ab})>0,$$

ce qui a lieu pour toute valeur négative de x et pour les valeurs positives supérieures à $\sqrt{ab}$.

II.

Je remarque d'abord que ni A ni C ne peuvent être nuls; car si on avait $A=0$, le polynome serait du premier degré en y, et quelle que fût la valeur de x, on pourrait déterminer y de manière à rendre le premier membre égal à un nombre négatif.

A étant différent de 0, l'inégalité peut se mettre sous la forme

$$A\left(y+\frac{Bx+D}{2A}\right)^2+\left(C-\frac{B^2}{4A}\right)x^2+\left(E-\frac{BD}{2A}\right)x+F-\frac{D^2}{4A}>0,$$

ou en posant

$$C-\frac{B^2}{4A}=M,\quad E-\frac{BD}{2A}=N,\quad F-\frac{D^2}{4A}=P,$$

$$A\left(y+\frac{Bx+D}{2A}\right)^2+Mx^2+Nx+P>0,$$

M ne peut être nul; car s'il en était ainsi, on pourrait trouver pour x une valeur qui rendît $Nx+P$ égal à un nombre négatif, et déterminer la valeur correspondante de y de manière à rendre $A\left(y+\frac{Bx+D}{2A}\right)^2$ inférieur en valeur absolue à $Nx+P$, de telle sorte que le premier membre serait négatif.

M étant différent de zéro, l'inégalité prend la forme

$$A\left(y+\frac{Bx+D}{2A}\right)^2+M\left(x+\frac{N}{2M}\right)^2+Q>0$$

en posant

$$P-\frac{N^2}{4M}=Q.$$

Digitized by Google

Or, je dis que cette égalité ne peut être satisfaite, quels que soient x et y, que si l'on a $A>0$, $M>0$, $Q>0$.

En effet, si on prend x et y de telle sorte que

$$x+\frac{N}{2M}=0, \quad y+\frac{Bx+D}{2A}=0,$$

le premier membre se réduit à Q. Donc $Q>0$.

Je dis ensuite que A et M doivent être positifs; car si on avait $A<0$, en choisissant x et y de manière que l'on eût

$$y+\frac{Bx+D}{2A}=k, \quad x+\frac{N}{2M}=h.$$

k étant un nombre suffisamment grand et h un nombre suffisamment petit, on pourrait toujours rendre le premier terme supérieur en valeur absolue à la somme des deux autres, et, par suite, rendre le polynome négatif. On prouverait de même qu'il est impossible d'avoir $B<0$.

Ainsi, en résumé, les conditions nécessaires et évidemment suffisantes pour que l'inégalité proposée ait lieu, quels que soient x et y, sont

$$A>0, \quad M>0, \quad Q>0.$$

III.

En suivant la même marche que dans l'exercice II, on parviendra facilement à mettre le polynome sous la forme

$$A(x+ay+bz+c)^2+M(y+dz+e)^2+N(z+f)^2+P,$$

et on trouvera que les conditions demandées sont

$$A>0, \quad M>0, \quad N>0, \quad P>0.$$

IV.

Pour déterminer la position de la sécante, il suffit de trouver le point M où elle rencontre la circonférence.

Appelons y la distance de ce point au diamètre donné, et x la distance du pied de la perpendiculaire abaissée de M sur ce

même diamètre au centre O; si, en outre, nous désignons par m la longueur donnée, nous aurons

$$x^2+y^2=R^2, \quad (a-x)^2+(b-y)^2=m^2;$$

d'où en retranchant

$$2ax+2by=R^2+a^2+b^2-m^2.$$

Si on tire de cette équation la valeur de y et qu'on la reporte dans la première, on trouve, en résolvant par rapport à x, et posant $a^2+b^2=\overline{OA}^2=d^2$,

$$x=\frac{a(d^2+R^2-m^2)\pm b\sqrt{4R^2d^2-(d^2+R^2-m^2)^2}}{2d^2}.$$

Pour que le problème soit possible, il faut que la quantité sous le radical soit positive, c'est-à-dire que l'on ait

$$(d+R+m)(d+R-m)(d-R+m)(R-d+m)>0.$$

Supposons d'abord le point A au dehors du cercle, nous aurons $d>R$; de sorte que, pour que l'inégalité précédente soit satisfaite, il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$\left.\begin{array}{l} d+R-m>0, \\ R-d+m>0, \end{array}\right\} \quad \text{ou bien} \quad \left\{\begin{array}{l} d+R-m<0, \\ R-d+m<0. \end{array}\right.$$

Le premier système donne

$$d-R<m<d+R.$$

Le second est absurde.

On traiterait de la même manière le cas où d serait plus petit que R.

V.

Soient o, o' les centres des cercles donnés, dont les rayons sont R et R', et désignons la longueur oo' par d; si un point M a la même polaire par rapport aux deux cercles, ce point doit évidemment être situé sur la ligne des centres; appelons x la distance de ce point au point o, la distance du point o à la polaire du point M par rapport au cercle o, sera $\frac{R^2}{x}$; la distance

Digitized by Google

du même point o à la polaire relative au cercle o' sera $d + \dfrac{R'^2}{x-d}$; pour que les deux droites se confondent, il faut que

$$\frac{R^2}{x} = d + \frac{R'^2}{x-d},$$

d'où $$x = \frac{d^2 + R^2 - R'^2 \pm \sqrt{(d^2 + R^2 - R'^2)^2 - 4d^2R^2}}{2d}.$$

Pour que x soit réel, il faut que

$$(d + R + R')(d + R - R')(R' - R + d)(d - R - R') > 0.$$

Nous pouvons supposer $R > R'$, alors les deux premiers facteurs étant positifs, il faut que l'on ait

$$\left.\begin{array}{l} R' - R + d > 0, \\ d - R - R' > 0, \end{array}\right\} \quad \text{ou bien} \quad \left\{\begin{array}{l} R' - R + d < 0, \\ d + R - R' < 0. \end{array}\right.$$

Le premier système donne

$$d > R + R',$$

et le second $$d < R - R',$$

ce qui exclut le cas où les deux circonférences se coupent.

VI.

On voit aisément que le logarithme de $\sqrt[m+n+p+q]{abcd}$ est compris entre le plus grand et le plus petit des logarithmes des expressions $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[p]{c}$, $\sqrt[q]{d}$; d'où l'on conclut la proposition énoncée.

VII.

Supposons d'abord toutes les quantités $a, a', a'', \ldots \alpha, \alpha', \alpha'' \ldots$ positives, et soient

$$\frac{a}{\alpha} = A, \quad \frac{a'}{\alpha'} = A', \quad \frac{a''}{\alpha''} = A'', \ldots$$

on en déduit sans peine

$$a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \ldots = A\alpha^2 + A'\alpha'^2 + \ldots,$$

et, par suite, si H désigne le plus grand des rapports A, A', A"...

$$[1] \qquad a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \ldots < \mathrm{H}(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \ldots).$$

De même, si h désigne le plus petit des rapports A, A', A"... $\frac{1}{h}$ sera le plus grand des rapports $\frac{\alpha}{a}$, $\frac{\alpha'}{a'}$, ... et on aura

$$[2] \qquad a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \ldots < \frac{1}{h}(a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots)$$

En multipliant les deux inégalités [1] et [2] membre à membre, et extrayant la racine carrée des deux membres, ce qui est évidemment permis, on aura

$$a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \ldots < \sqrt{\frac{\mathrm{H}}{h}} \cdot \sqrt{\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \ldots}\sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots};$$

et, *à fortiori*, puisque H est plus grand que h,

$$[3] \quad a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \ldots < \sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots}\sqrt{\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \ldots}$$

Ce qu'il fallait démontrer. Si l'on avait $A = A' = A'' \ldots$, les inégalités [1], [2] et [3] se changeraient en égalités.

Si quelques-unes des quantités proposées étaient négatives, l'inégalité [3] serait vraie *à fortiori*.

VIII.

L'on a

$$x^5 + y^5 - x^4y - y^4x = x^4(x-y) - y^4(x-y) = (x^4 - y^4)(x-y).$$

Les deux facteurs $x^4 - y^4$ et $x - y$ étant toujours de même signe, leur produit est toujours positif.

IX.

On a

$$3(1 + a^2 + a^4) - (1 + a + a^2)^2 = 2 - 2a - 2a^3 + 2a^4 = 2(1-a)(1-a^3);$$

or, $1 - a$ et $1 - a^3$ sont toujours de même signe. Donc, etc.

X.

On a

$$a^2 > a^2 - (b-c)^2 \quad \text{d'où} \quad a^2 > (a+b-c)(a+c-b),$$
$$b^2 > b^2 - (a-c)^2 \quad \text{d'où} \quad b^2 > (b+a-c)(b+c-a),$$
$$c^2 > c^2 - (a-b)^2 \quad \text{d'où} \quad c^2 > (a+c-b)(b+c-a).$$

En multipliant membre à membre

$$a^2b^2c^2 > (a+b-c)^2(a+c-b)^2(b+c-a)^2.$$

XI.

En posant $b = a + x$, $c = a + y$, on a

$$ab(a+b) = 2a^3 + 3a^2x + ax^2,$$
$$ac(a+c) = 2a^3 + 3a^2y + ay^2,$$
$$bc(b+c) = 2a^3 + 3a^2(x+y) + a(x+y)^2 + (x+y)xy,$$
$$6abc = 6a^3 + 6a^2(x+y) + 6axy;$$

d'où

$$ab(a+b) + ac(a+c) + bc(b+c) - 6abc = 2a(x^2 - 2xy + y^2)$$
$$+ (x+y)xy = 2a(x-y)^2 + (x+y)xy.$$

XII.

On a

$$a_1 + a_2 > 2\sqrt{a_1a_2},$$
$$a_1 + a_3 > 2\sqrt{a_1a_3},$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$a_{n-1} + a_n > 2\sqrt{a_{n-1}a_n},$$

d'où

$$(n-1)(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) > 2(\sqrt{a_1a_2} + \sqrt{a_1a_3} + \ldots + \sqrt{a_{n-1}a_n}).$$

CHAPITRE XI.

I.

Soient $m=\frac{m'}{p}$, $n=\frac{n'}{q}$, on aura $x^m y^n=\sqrt[pq]{x^{m'q}y^{n'p}}$; or, il suffit de trouver le maximum de la quantité sous le radical; donc on doit avoir

$$\frac{x}{y}=\frac{m'q}{n'p}=\frac{\frac{m'}{p}}{\frac{n'}{q}}=\frac{m}{n}.$$

II.

Si l'on pose $x^m=y$, $\frac{1}{x^n}=z$, on voit aisément que la question revient à trouver le minimum de $y+z$, sachant que le produit $y^{\frac{1}{m}}z^{\frac{1}{n}}$ est constant.

III.

Posons $p=x^m y^n$, $z=x^{m'}y^{n'}$, d'où l'on tire $z=p^{\frac{n'}{n}}\times x^{\frac{nm'-mn'}{n}}$; sous cette forme on voit que z pourra devenir aussi grand ou aussi petit qu'on le voudra, à moins que $nm'-mn'=0$.

IV.

Désignons les arêtes du parallélipipède cherché par x, y, z, nous aurons $xy+yz+zx=a^2$; la somme des quantités xy, yz, zx, étant constante, leur produit $x^2y^2z^2=V^2$ sera maximum lorsque l'on aura $xy=yz=zx$, c'est-à-dire lorsque les trois arêtes seront égales.

Si V était constant, a serait minimum dans les mêmes conditions.

Digitized by Google

V.

Soient a le rayon d'un cercle équivalent à la surface donnée, H la hauteur de la zone, et R le rayon du cercle qui lui sert de base. On trouve facilement

$$R^2 + H^2 = a^2$$

et

$$\frac{\pi}{6}H(H^2 + 3R^2)$$

pour l'expression du volume, ou bien

$$\frac{\pi}{6}H(3a^2 - 2H^2).$$

Pour rendre cette quantité maxima, il suffit de rendre maxima

$$(2H^2)^{\frac{1}{2}}(3a^2 - 2H^2),$$

donc on doit avoir $3a^2 - 2H^2 : 2H^2 :: 1 : \frac{1}{2}$,

d'où $H = \frac{a}{\sqrt{2}}$, et par suite $R = \frac{a}{\sqrt{2}}$;

ainsi le segment maximum est un hémisphère.

La remarque du n° **120** prouve que si l'on cherchait parmi les zones qui comprennent le même volume celle qui a la plus petite surface, on trouverait encore un hémisphère.

VI.

En désignant par x le rayon de la base et par y la moitié de la hauteur du cylindre, on a $x^2 + y^2 = R^2$, et l'expression à rendre maxima est x^2y, ce qui exige que l'on ait

$$x^2 : y^2 :: 2 : 1,$$

d'où $x = R\sqrt{\frac{2}{3}}$ et $y = R\sqrt{\frac{1}{3}}$;

le volume maximum sera donc

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3\sqrt{\frac{1}{3}},$$

Digitized by Google

et, par suite, le rayon de la plus petite sphère dans laquelle on pourra inscrire un cylindre de volume V sera égal à

$$\sqrt[3]{\frac{3V\sqrt{3}}{4\pi}}.$$

VII.

En remplaçant $\operatorname{tg} 3a$ par sa valeur en fonction de $\operatorname{tg} a = x$, l'expression à rendre minima devient

$$\frac{3 - x^2}{(1 - 3x^2)x^2},$$

en l'égalant à y, on trouve

$$x = \sqrt{\frac{y + 1 \pm \sqrt{y^2 - 34y + 1}}{6y}},$$

par où l'on voit aisément que la valeur minima de y est

$$17 + 12\sqrt{2}.$$

VIII.

Soit x la vitesse commune des deux corps après le choc, l'expression à rendre minima sera

$$m(v-x)^2 + m'(v'-x)^2 = (m + m')x^2 - 2(mv + m'v')x + mv^2 + m'v'^2;$$

or, la valeur de x qui rend minima

$$ax^2 - bx + c$$

est $$x = \frac{b}{2a}:$$

donc ici la valeur cherchée est

$$x = \frac{mv + m'v'}{m + m'}.$$

IX.

Soit x la distance du point cherché au premier point, l'expression à rendre minima sera

$$x^2+2(x-1)^2+3(x-2)^2+\ldots n[x-(n-1)]^2=\frac{n(n+1)}{2}x^2$$
$$-\frac{2n(n-1)(n+1)}{3}x+2.1^2+3.2^2+\ldots+n(n-1)^2,$$

donc la valeur cherchée est

$$x=\tfrac{2}{3}(n-1).$$

X.

L'expression

$$x^2+3(x-1)^2+6(x-2)^2+10(x-3)^2+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}[x-(n-2)]^2,$$

qu'il faut rendre minima, peut se mettre sous la forme

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}x^2-\frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{4}x+3.1^2+6.2^2$$
$$+\ldots\frac{n(n+1)}{2}(n-1)^2,$$

donc la valeur cherchée est

$$x=\tfrac{3}{4}(n-1).$$

XI.

En désignant par a le côté du carré donné, et par x le côté d'un des quatre petits carrés, on voit facilement que le volume de la boîte est

$$(a-2x)^2x,$$

pour rendre cette expression maxima, il faut que l'on ait

$$a-2x:2x::2:1,$$

d'où $$x=\frac{a}{6}.$$

XII.

Le logarithme d'une expression devenant minimum en même temps que cette expression, il suffit de chercher la valeur de x qui rend minima

$$x^3 \log a + \frac{1}{x^2} \log b\,;$$

en généralisant la méthode employée dans la question II, on voit que la valeur cherchée de x est donnée par la proportion

$$x^3 \log a : \frac{1}{x^2} \log b :: \frac{1}{3} : \frac{1}{2}.$$

XIII.

On a $$\frac{(x+a)(x-b)}{x^2} = 1 + ab \times \frac{1}{x}\left(\frac{a-b}{ab} - \frac{1}{x}\right),$$

donc cette expression sera maxima pour la valeur

$$\frac{1}{x} = \frac{a-b}{2ab}.$$

XIV.

On a $$a + x + \frac{(a+x)^2}{a-x} = 2a\frac{a+x}{a-x},$$

quantité qui peut passer par tous les états de grandeur.

XV.

$$\frac{a+x}{a-x} + \frac{a-x}{a+x} = 2\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2},$$

cette quantité est évidemment toujours plus grande que 2, excepté pour $x=0$.

Digitized by Google

XVI.

En résolvant par rapport à x, on trouve

$$x = a(y-1) + \sqrt{(a^2-1)(y-1)^2 - 4a - 1};$$

si l'on suppose que x et y aient les valeurs qui conviennent au minimum de a, la quantité sous le radical doit être nulle, car s'il en était autrement, cette quantité serait positive, et a pourrait diminuer sans que la valeur de x cessât d'être réelle; donc la variable a ne serait pas à son minimum.

On a donc $$x = a(y-1),$$

en résolvant par rapport à y, on trouve de la même manière

$$y = ax + 1;$$

en joignant ces deux équations à la proposée, on trouve

$$x = 0, \quad y = 1, \quad a = \tfrac{1}{4}.$$

CHAPITRE XII.

I.

Soit g un nombre entier, tel que

$$gn = \text{multiple de } p + 1 = 1 + hp.$$

On démontre (voyez l'analyse indéterminée) qu'il existe toujours un pareil nombre. On aura

$$\begin{aligned}\frac{1 + x^n + x^{2n} + \ldots x^{np-n}}{1 + x + x^2 + x^3 + \ldots x^{p-1}} &= \frac{(1-x^{np})(1-x)}{(1-x^n)(1-x^p)} \\ &= \frac{(1-x^{np})(1-x^{gn}-x+x^{hp+1})}{(1-x^n)(1-x^p)} \\ &= \frac{1-x^{np}}{1-x^p}\cdot\frac{1-x^{gn}}{1-x^n} - x\,\frac{1-x^{np}}{1-x^n}\cdot\frac{1-x^{hp}}{1-x^p};\end{aligned}$$

et ces divisions peuvent évidemment s'effectuer.

II.

Posons $$X = 1 + x + x^{\alpha} + x^{\alpha^2} + x^{\alpha^3} + \ldots x^{\alpha^{p-2}}.$$

L'expression $X - 1 - x - x^2 - x^3 - \ldots - x^{p-1}$ sera divisible par $1 - x^p$; car l'exposant de chacun des termes de X surpasse par hypothèse d'un multiple de p l'exposant de chacun des termes que l'on en retranche. On pourra donc réunir les termes de la différence en groupes de la forme

$$x^{pk+h} - x^h = x^h(x^{pk} - 1);$$

ce qui est divisible par $1 - x^p$; et, par suite, par $\frac{1-x^p}{1-x}$; or $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{p-1}$ est égal à $\frac{1-x^p}{1-x}$; donc X doit être divisible par $\frac{1-x^p}{1-x}$.

III.

Considérons les $p - 1$ polynomes :

$$xM - x^2 + x^{\alpha+1} - x^{\alpha^2+1} + \ldots + x^{\alpha^{p-2}+1},$$
$$- \quad x^{\alpha}M - x^{2\alpha} + x^{\alpha^2+\alpha} - x^{\alpha^3+\alpha} + \ldots + x^{\alpha^{p-1}+\alpha},$$
$$x^{\alpha^2}M - x^{2\alpha^2} + x^{\alpha^3+\alpha^2} - x^{\alpha^4+\alpha^2} + \ldots + x^{\alpha^{p}+\alpha^2},$$
$$- \quad x^{\alpha^3}M - x^{2\alpha^3} + x^{\alpha^4+\alpha^3} - x^{\alpha^5+\alpha^3} + \ldots + x^{\alpha^{p+1}+\alpha^3},$$
$$\vdots$$
$$- x^{\alpha^{p-2}}M - x^{2\alpha^{p-2}} + x^{\alpha^{p-1}+\alpha^{p-2}} - x^{\alpha^{p}+\alpha^{p-2}} + \ldots + x^{\alpha^{2p-4}+\alpha^{p-2}}.$$

Le premier est identiquement nul, les autres sont divisibles par $1 - x^p$, comme on le voit facilement en se rappelant que $\alpha^{p-1} - 1$ est divisible par p (théorème de Fermat); la somme de ces expressions est, par suite, divisible par $1 - x^p$. Or, en posant

$$f(x) = 1 + x + x^{\alpha} + x^{\alpha^2} + \ldots + x^{\alpha^{p-2}},$$

cette somme est égale à

$$M^2 - [f(x^2) - 1] + [f(x^{\alpha+1}) - 1] - [f(x^{\alpha^2+1}) - 1] + \ldots + [f(x^{\alpha^{p-2}+1}) - 1]$$
$$= M^2 - f(x^2) + f(x^{\alpha+1}) - f(x^{\alpha^2+1}) + \ldots + f(x^{\alpha^{p-2}+1}).$$

Parmi les exposants $2, \alpha+1, \alpha^2+1+\ldots+\alpha^{p-2}+1$, il ne peut y en avoir qu'un seul qui soit divisible par p (théorème facile à démontrer), et il y en a toujours un, savoir : $\alpha^{\frac{p-1}{2}}+1$. D'après cela, $f(x^2)$, $f(x^{\alpha+1}) \ldots f(x^{\alpha^{p-2}+1})$ sont divisibles par $\frac{1-x^p}{1-x}$, à l'exception de $f(x^{\alpha^{\frac{p-1}{2}}+1})$; et, en effet, $f(x)$ est divisible par $\frac{1-x^p}{1-x}$ (Exercice II); donc $f(x^n)$ est divisible par $\frac{1-x^{np}}{1-x^n}$, et par suite par $\frac{1-x^p}{1-x}$ si n et p sont premiers entre eux, car le second diviseur (Exercice I) divise alors le premier.

En supprimant de la somme considérée les parties qui sont divisibles par $\frac{1-x^p}{1-x}$, on conclut de ce qui précède que

$$M^2 \pm f(x^{\alpha^{\frac{p-1}{2}}+1})$$

est divisible par $\frac{1-x^p}{1-x}$; le signe supérieur convient si p est de la forme $4k+1$; dans le cas contraire, il faut prendre le signe inférieur.

Mais $f(x^{\alpha^{\frac{p-1}{2}}+1})-p$ est divisible par $1-x^p$; car en posant

$$\alpha^{\frac{p-1}{2}}+1=kp,$$

$$f(x^{\alpha^{\frac{p-1}{2}}+1})-p=x^{kp}-1+(x^{kp})^\alpha-1+(x^{kp})^{\alpha^2}-1+\ldots+(x^{kp})^{\alpha^{p-2}}-1,$$

dont toutes les parties sont divisibles par x^p-1, et, *à fortiori*, par $\frac{1-x^p}{1-x}$; par conséquent, en retranchant ou ajoutant ces deux expressions qui sont divisibles par $\frac{1-x^p}{1-x}$, leur différence ou leur somme

$$M^2 \mp p$$

jouira de la même propriété.

Remarque. Nous avons admis, dans ce qui précède, quelques propositions d'arithmétique dont nous allons indiquer la démonstration.

Digitized by Google

1° Théorème de Fermat. p *étant premier et* α *non divisible par* p, $\alpha^{p-1}-1$ *est divisible par* p.

Considérons les nombres

$$\alpha,\ 2\alpha,\ 3\alpha,\ \ldots,\ (p-1)\alpha,$$

qui évidemment sont premiers avec p. Si on les divise tous par p, les restes sont différents; car la différence de deux d'entre eux ne peut être divisible par p. Les restes obtenus seront donc, peu importe dans quel ordre,

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ p-1;$$

donc le reste de la division par p du produit

$$1.2.3\ldots(p-1)$$

sera le même que le reste de la division par p du produit

$$\alpha.2\alpha.3\alpha\ldots(p-1)\alpha=\alpha^{p-1}.1.2.3\ldots(p-1),$$

et, par suite, la différence de ces deux produits, ou

$$1.2.3\ldots(p-1)(\alpha^{p-1}-1),$$

est divisible par p. Mais $1.2.3\ldots(p-1)$ est premier avec p: donc $\alpha^{p-1}-1$ est divisible par p.

2° $\alpha^{\frac{p-1}{2}}+1$ *est divisible par* p.

On a, en effet,

$$\alpha^{p-1}-1=(\alpha^{\frac{p-1}{2}}+1)(\alpha^{\frac{p-1}{2}}-1).$$

Le produit est donc divisible par p; or $\alpha^{\frac{p-1}{2}}-1$ ne l'est pas; car, par hypothèse, α est une racine primitive de p, et deux puissances de α ($\alpha^{\frac{p-1}{2}}$ et α^0) ne peuvent donner le même reste 1 lorsqu'on les divise par p.

IV.

Le dividende s'annule pour $x=y$; donc il est divisible par $x-y$. Le quotient de cette division, que je désigne par Q, est entier par rapport à x, y, z; car la division par $x-y$ ne peut introduire aucun dénominateur.

Digitized by Google

On aura

$$x^q y^r + y^q z^r + z^q x^r - x^r y^q - y^r z^q - z^r x^q = Q(x-y).$$

Le premier membre s'annule pour $x=z$; donc Q s'annule par la même hypothèse, et l'on a

$$Q = (x-z)Q_1,$$

Q_1 étant encore un polynome sans dénominateur; on en conclut

$$x^q y^r + y^q z^r + z^q x^r - x^r y^q - y^r z^q - z^r x^q = (x-y)(x-z)Q_1.$$

Enfin, le premier membre s'annule pour $y=z$; donc il en est de même de Q_1, et l'on a

$$Q_1 = (y-z)Q_2,$$

Q_2 étant un polynome sans dénominateur qui représente évidemment le quotient demandé.

V.

La démonstration est absolument la même.

VI.

On a démontré (Chapitre II, Exercice XVII) la formule

$$\frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})\ldots(1-x^{m-n})}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^{n+1})} = \frac{(1-x^{m-1})(1-x^{m-2})\ldots(1-x^{m-n-1})}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^{n+1})}$$
$$+ \frac{x^{m-n-1}(1-x^{m-1})(1-x^{m-2})\ldots(1-x^{m-n})}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^n)};$$

d'où l'on conclut que si le théorème est démontré pour une valeur de m moindre d'une unité, il sera vrai pour la valeur considérée. Or le théorème est évident pour $m=n$; donc il a lieu dans tous les cas.

VII.

Même démonstration que pour l'exercice IV.

Digitized by Google

VIII.

$x^m - a^m$ est divisible par $x^n - a^n$ quand m est divisible par n. On a, en effet, identiquement

$$\frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} = x^{m-n} - a^n \frac{x^{m-n} - a^{m-n}}{x^n - a^n};$$

$\frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$ ne peut donc être entier que s'il en est de même de $\frac{x^{m-n} - a^{m-n}}{x^n - a^n}$, et, par suite, de $\frac{x^{m-2n} - a^{m-2n}}{x^n - a^n}, \ldots, \frac{x^{m-kn} - a^{m-kn}}{x^n - a^n}$. Mais si m n'est pas divisible par n, $m - kn$ peut toujours être rendu plus petit que n, et l'on arriverait alors à une absurdité.

CHAPITRE XIII.

I.

$\overset{m}{[(a+b)]}$ est le nombre des arrangements m à m de $a+b$ lettres. Si on partage ces lettres en deux groupes, l'un de a lettres, l'autre de b, ces arrangements pourront se subdiviser en différentes classes : 1° les arrangements qui ne renferment que des lettres du premier groupe ; 2° ceux qui renferment $m-1$ lettres du premier groupe et 1 du second ; 3° ceux qui renferment $m-2$ lettres du premier groupe et 2 du second, et ainsi de suite.

Cherchons combien il y a d'arrangements de la $(n+1)^e$ classe. A cet effet, on peut commencer par former tous les arrangements des a lettres du premier groupe $m-n$ à $m-n$; leur nombre est $\overset{m-n}{[a]}$. Dans chacun de ces arrangements, on introduira n lettres du second groupe, et on variera leur ordre de toutes les manières possibles, sans changer l'ordre des premières, ce qui peut se faire de $\overset{n}{[m]}$ manières, et on obtiendra ainsi $\overset{n}{[m]}\overset{m-n}{[a]}$ arrangements $m-n$ à $m-n$. Enfin, il y aura autant de ces arrangements que de manières de prendre n

choses sur b, c'est-à-dire $\dfrac{\overset{n}{[b]}}{1.2.3\ldots n}$; donc le nombre des arrangements de la $(n+1)^e$ classe sera

$$\frac{\overset{n}{[m]}}{1.2.3\ldots n}\,\overset{m-n}{[a]}\,\overset{n}{[b]}.$$

En faisant varier n depuis 0 jusqu'à m, on obtiendra pour le nombre total des arrangements :

$$[(a\overset{m}{+}b)]=\overset{m}{[a]}+m\overset{m-1}{[a]}b+\frac{\overset{2}{[m]}}{1.2}\overset{m-2}{[a]}\,\overset{2}{[b]}+\frac{\overset{3}{[m]}}{1.2.3}\overset{m-3}{[a]}\,\overset{3}{[b]}+\ldots,$$

ce qui est la première formule proposée puisque

$$\overset{2}{[m]}=m(m-1),\quad \overset{3}{[m]}=m(m-1)(m-2),\ \text{etc.}$$

La première formule étant démontrée, la seconde en est une conséquence très-simple. Nous ne nous y arrêterons pas.

II.

On a

$$\begin{aligned}(a+b+c)^m=(a+b)^m+A(a+b)^{m-1}c+B(a+b)^{m-2}c^2+\ldots\\+A(a+b)c^{m-1}+c^m;\end{aligned}$$

or le développement de $(a+b)^m$ fournit $m+1$ termes.

Le développement de $A(a+b)^{m-1}c$ fournit m termes irréductibles avec les premiers.

Le développement de $B(a+b)^{m-2}c^2$ fournit $m-1$ termes irréductibles avec ceux déjà obtenus.

Et ainsi de suite.

Le nombre des termes du développement de $(a+b+c)^m$ est donc égal à

$$m+1+m+m-1+m-2+\ldots+2+1,$$

ou à
$$\frac{(m+2)(m+1)}{2}.$$

On verra de la même manière que le nombre des termes du développement de $(a+b+c+d)^m$ est égal à

$$\frac{(m+2)(m+1)}{2}+\frac{(m+1)m}{2}+\frac{m(m-1)}{2}+\ldots+6+3+1,$$

ou, d'après une propriété que nous démontrerons plus bas (Exercice XI),

$$\frac{(m+4)(m+3)(m+2)}{1\,.\,2\,.\,3}.$$

III.

Il faut lire

$$x^n+\frac{1}{x^n}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^n-n\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-2}+\frac{n(n-3)}{1\,.\,2}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-4}$$

$$-\frac{n(n-4)(n-5)}{1\,.\,2\,.\,3}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-6}+\ldots$$

$$+(-1)^p\frac{n(n-p-1)(n-p-2)\ldots(n-2p+1)}{1\,.\,2\ldots p}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-2p}+\ldots$$

On a identiquement

$$x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}=\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right),$$

et, d'après cette formule, on démontre sans peine que si le théorème est vrai pour deux valeurs consécutives de n, il le sera pour la valeur immédiatement supérieure.

IV.

On trouve facilement

$$(x+1)^m-x^m=mx^{m-1}+\frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}+\ldots$$

Changeons, dans cette égalité, x en $x+1$, et retranchons-la membre à membre du résultat obtenu; il vient

$$(x+2)^m-2(x+1)^m+x^m=m(m-1)x^{m-2}+\ldots$$

Changeons encore, dans cette seconde égalité, x en $x+1$, et retranchons-la membre à membre du résultat obtenu; nous aurons

$$(x+3)^m-3(x+2)^m+3(x+1)^m-x^m=m(m-1)(m-2)x^{m-3}+\ldots$$

En répétant m fois cette opération, on obtient la formule demandée.

V.

T_n désignant le terme de rang n dans le développement de $(x+a)^m$, on a (144)

$$T_{n+1} = \frac{m-n+1}{n}\frac{a}{x}T_n,$$

par où l'on voit que les termes vont en croissant tant que l'on a

$$\frac{m-n+1}{n}\frac{a}{x} > 1 \quad \text{ou} \quad n < \frac{(m+1)a}{x+a}.$$

Il suit de là que le terme maximum est T_p, p étant le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{m+1}{x+a}a$: ce terme sera donc

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-p+2)}{1.2.3\ldots(p-1)}x^{m-p+1}a^{p-1}.$$

Il faut maintenant chercher la limite du rapport des exposants. Remarquons d'abord que

$$\lim\frac{m-p+1}{p-1} = \lim\left\{\frac{m}{p-1} - 1\right\} = \lim\left\{\frac{\frac{m}{p}}{1-\frac{1}{p}}\right\} - 1 = \lim\frac{m}{p} - 1,$$

puisque p devient infini en même temps que m. Or, par hypothèse, on a

$$p < \frac{(m+1)a}{x+a} < p+1,$$

d'où on tire $\quad \frac{x+a}{a} < \frac{m+1}{p} < \left(1+\frac{1}{p}\right)\frac{x+a}{a},$

ce qui montre que

$$\lim\frac{m+1}{p} = \lim\frac{m}{p} = \frac{x+a}{a},$$

et, par suite,

$$\lim\frac{m-p+1}{p-1} = \frac{x+a}{a} - 1 = \frac{x}{a}.$$

Digitized by Google

$$(a+b+c)^m=(a+b)^m+m(a+b)^{m-1}c+\frac{m(m-1)}{1.2}(a+b)^{m-2}c^2+\ldots;$$

le terme cherché doit être le plus grand entre les plus grands termes des développements partiels $(a+b)^m$, $m(a+b)^{m-1}c$, etc. Il suit de là que si m augmente indéfiniment, et si x, y, z désignent les exposants de a, b, c dans le terme maximum, on aura

$$\lim\frac{x}{y}=\frac{a}{b},$$

et de même $$\lim\frac{x}{z}=\frac{a}{c},\quad \lim\frac{y}{z}=\frac{b}{c};$$

par conséquent, les exposants x, y, z tendront de plus en plus à être proportionnels aux nombres a, b, c.

VI.

On a

$$(x+a)^m=x^m+max^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2}+\ldots,$$

$$(x-a)^m=x^m-max^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2}-\ldots,$$

d'où l'on déduit

$$(x+a)^m+(x-a)^m$$
$$=2\left[x^m+\frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2}+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}a^4x^{m-4}+\ldots\right].$$

Si m est pair, ou si m étant impair, x est positif, tous les termes du second membre sont positifs et $2x^m$ en est une partie. Si m est impair et x négatif, tous les termes du second membre sont négatifs, mais on les rendra positifs en changeant les signes des deux membres. Donc, dans tous les cas, on a, en valeur absolue,

$$(x+a)^m+(x-a)^m>2x^m.$$

Je dis maintenant que si on a

$$x^m+y^m=2b^m,$$

la somme $x+y$ sera maximum pour $x=y$.

Digitized by Google

En effet, si x et y n'étaient pas égaux, l'un d'eux devrait être supérieur à b et l'autre inférieur. On peut donc poser

$$x=b+\alpha,\quad y=b-\beta,$$

mais il faut que β soit plus grand que α, car si on avait $\beta=\alpha-\gamma$, comme déjà on a $(b+\alpha)^m+(b-\alpha)^m>2b^m$, on aurait *à fortiori* $(b+\alpha)^m+(b-\alpha+\gamma)^m>2b^m$.

Donc, puisque β est plus grand que α, $x+y=2b+\alpha-\beta$ est moindre que $2b$. Donc $x+y$ est moindre quand x et y sont inégaux.

VII.

La formule proposée se vérifie directement pour $m=1, 2, 3$: elle sera donc établie d'une manière générale si nous faisons voir, qu'en la supposant vraie jusqu'à une certaine valeur de m, elle est encore vraie lorsqu'on augmente cette valeur d'une unité.

Supposons donc que l'on ait

$$(x+\alpha)^m=x^m+m\alpha(x+\beta)^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}\alpha(\alpha-2\beta)(x+2\beta)^{m-2}+\ldots$$
$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}\alpha(\alpha-n\beta)^{n-1}(x+n\beta)^{m-n}+\ldots;$$

il faut démontrer que, si dans le second membre on remplace m par $m+1$, le résultat sera égal à $(x+\alpha)^{m+1}$; or en faisant cette substitution, on trouve

$$x^{m+1}+(m+1)\alpha(x+\beta)^m+\frac{(m+1)m}{1.2}\alpha(\alpha-2\beta)(x+2\beta)^{m-1}+\ldots$$
$$+\frac{(m+1)m(m-1)\ldots(m-n+2)}{1.2.3\ldots n}\alpha(\alpha-n\beta)^{n-1}(x+n\beta)^{m-n+1}+\ldots$$

Si nous représentons par C_n^m le nombre des combinaisons distinctes de m lettres prises n à n, cette expression peut être mise (Exercice XI) sous la forme

$$x^{m+1}+(C_1^m+1)\alpha(x+\beta)^m+(C_2^m+C_1^m)\alpha(\alpha-2\beta)(x+2\beta)^{m-1}+\ldots$$
$$+(C_n^m+C_{n-1}^m)\alpha(\alpha-n\beta)^{n-1}(x+n\beta)^{m-n+1}+\text{etc.},$$

Digitized by

et, par suite, on peut la décomposer en deux parties

$$A = x^{m+1} + C_1^m \alpha(x+\beta)^m + C_2^m \alpha(\alpha - 2\beta)(x+2\beta)^{m-1} + \ldots$$
$$+ C_n^m \alpha(\alpha - n\beta)^{n-1}(x+n\beta)^{m-n+1} + \ldots$$

$$B = \alpha(x+\beta)^m + C_1^m \alpha(\alpha-2\beta)(x+2\beta)^{m-1} + \ldots$$
$$+ C_{n-1}^m \alpha(\alpha - n\beta)^{n-1}(x+n\beta)^{m-n+1} + \ldots.$$

Maintenant je remarque que A se compose de

$$x^m x + C_1^m \alpha(x+\beta)^{m-1} x + C_2^m \alpha(\alpha-2\beta)(x+2\beta)^{m-2} x + \ldots$$
$$+ C_n^m \alpha(\alpha - n\beta)^{n-1}(x+n\beta)^{m-n} x + \ldots$$

qui n'est autre chose que $(x+\alpha)^m \cdot x$,

et de
$$C_1^m \alpha(x+\beta)^{m-1}\beta$$
$$+ 2C_2^m \alpha(\alpha-2\beta)(x+2\beta)^{m-2}\beta + \ldots$$
$$+ nC_n^m \alpha(\alpha-n\beta)^{n-1}(x+n\beta)^{m-n}\beta \ldots$$

polynome qui peut être mis sous la forme suivante :

$$A_1 = C_1^m \alpha\beta[(x+\beta)^{m-1} + C_1^{m-1}(\alpha-2\beta)(x+2\beta)^{m-2} + \ldots$$
$$+ C_{n-1}^{m-1}(\alpha - n\beta)^{n-1}(x+n\beta)^{m-n} + \ldots];$$

car on a, en général,

$$nC_n^m = mC_{n-1}^{m-1} = C_1^m \cdot C_{n-1}^{m-1}.$$

Pour transformer la quantité entre parenthèses, je pose

$$x + \beta = x_1,$$
$$\alpha - \beta = \alpha_1;$$

il vient alors

$$x_1^{m-1} + C_1^{m-1}(\alpha_1 - \beta)(x_1+\beta)^{m-2} + C_2^{m-1}(\alpha_1 - 2\beta)^2(x_1+2\beta)^{m-3} + \ldots$$
$$+ C_{n-1}^{m-1}[\alpha_1 - (n-1)\beta]^{n-1}[x_1 + (n-1)\beta]^{m-n} + \ldots,$$

ou bien

$$x_1^{m-1} + C_1^{m-1}\alpha_1(x_1+\beta)^{m-2} + C_2^{m-1}\alpha_1(\alpha_1-2\beta)(x_1+2\beta)^{m-3} + \ldots$$
$$+ C_{n-1}^{m-1}\alpha_1[\alpha_1 - (n-1)\beta]^{n-2}[x_1+(n-1)\beta]^{m-n} + \ldots$$
$$- C_1^{m-1}(x_1+\beta)^{m-2}\beta - 2C_2^{m-1}(\alpha_1-2\beta)(x_1+2\beta)^{m-3}\beta - \ldots$$
$$-(n-1)C_{n-1}^{m-1}[\alpha_1-(n-1)\beta]^{n-2}[x_1+(n-1)\beta]^{m-n}\beta - \ldots.$$

La première partie est égale à

$$(x_1+\alpha_1)^{m-1} = (x+\alpha)^{m-1};$$

la seconde peut être mise sous la forme

$$-C_1^{m-1}\beta\left[(x_1+\beta)^{m-2}+C_1^{m-2}(\alpha_1-2\beta)(x_1+2\beta)^{m-3}+\ldots\right.$$
$$\left.+C_{n-2}^{m-2}[\alpha_1-(n-1)\beta]^{n-2}[x_1+(n-1)\beta]^{m-n}+\ldots\right].$$

Nous poserons comme précédemment

$$x_1+\beta=x_2,$$
$$\alpha_1-\beta=\alpha_2,$$

et la quantité entre parenthèses se décompose en deux parties, l'une égale à

$$(x_2+\alpha_2)^{m-2}=(x_1+\alpha_1)^{m-2}=(x+\alpha)^{m-2},$$

l'autre à

$$-C_1^{m-2}\beta[(x_2+\beta)^{m-3}+C_1^{m-3}(\alpha_1-2\beta)(x_2+2\beta)^{m-4}+\ldots].$$

On posera encore

$$x_2+\beta=x_3,\quad \alpha_2-\beta=\alpha_3,$$

et ainsi de suite : par où l'on voit que la quantité désignée par A_1 peut être mise sous la forme suivante :

$$A_1=C_1^m\alpha\beta\Big[(x+\alpha)^{m-1}-C_1^{m-1}\beta\big[(x+\alpha)^{m-2}-C_1^{m-2}\beta[(x+\alpha)^{m-3}-\ldots]\big]\Big],$$
$$A_1=C_1^m\alpha\beta(x+\alpha)^{m-1}-C_1^mC_1^{m-1}\alpha\beta^2(x+\alpha)^{m-2}$$
$$+C_1^mC_1^{m-1}C_1^{m-2}\alpha\beta^3(x+\alpha)^{m-3}+\ldots,$$

de sorte que

$$A=(x+\alpha)^m\,.\,x+m\alpha\beta(x+\alpha)^{m-1}-m(m-1)\alpha\beta^2(x+\alpha)^{m-2}$$
$$+m(m-1)(m-2)\alpha\beta^3(x+\alpha)^{m-3}-\ldots$$

Par des transformations analogues, on trouve

$$B=(x+\alpha)^m\,.\,\alpha-m\alpha\beta(x+\alpha)^{m-1}+m(m-1)\alpha\beta^2(x+\alpha)^{m-2}$$
$$-m(m-1)(m-2)\alpha\beta^3(x+\alpha)^{m-3};$$

donc $\quad A+B=(x+\alpha)^m\,.\,x+(x+\alpha)^m\,.\,\alpha=(x+\alpha)^{m+1}.$

VIII.

1° Soit ABCDE ... Z un polygone de $n+1$ côtés.

Le nombre des décompositions dont fait partie le triangle ABC est évidemment P_n, nombre de décompositions relatif au polygone ACD ... Z.

Le nombre des décompositions dont fait partie le triangle ABD est P_3P_{n-1} : car le triangle BCD peut se combiner avec chacun des P_{n-1} modes de décompositions relatifs au polygone ADE ... Z.

Le nombre des décompositions dont fait partie le triangle ABE est P_4P_{n-2} : car chaque mode relatif au quadrilatère BCDE doit se combiner avec chacun des P_{n-2} modes relatifs au polygone AEF ... Z ; et ainsi de suite.

Comme il est clair qu'on obtient ainsi toutes les décompositions possibles et chacune une seule fois, on aura donc

$$[1] \quad P_{n+1} = P_n + P_{n-1}P_3 + P_{n-2}P_4 + \dots + P_3P_{n-1} + P_n,$$

ce qu'il fallait démontrer.

2° Supposons maintenant un polygone ABCD ... Y de n côtés et considérons les modes de décompositions dans lesquels chacune des diagonales issues du point A est employée. Par un raisonnement analogue à celui qui précède, on voit que le nombre de ces modes est P_3P_{n-1} pour AC; P_4P_{n-2} pour AD, etc. Par suite, en répétant la même opération pour les n sommets, le nombre total des modes ainsi considérés sera

$$[2] \quad n(P_3P_{n-1} + P_4P_{n-2} + \dots + P_{n-1}P_4 + P_{n-1}P_3).$$

Il est clair qu'on obtient de cette manière toutes les décompositions possibles, mais quelques-unes d'entre elles se répètent.

En effet, chaque décomposition se fait au moyen de $n-2$ triangles, ayant $3n-6$ côtés et dans lesquels les n côtés du polygone entrent chacun une seule fois. $2n-6$ côtés sont donc formés par des diagonales, et comme chacune appartient à deux triangles, on voit que chaque mode emploie $n-3$ diagonales. Or, toute décomposition partielle doit évidemment se reproduire autant de fois que les $n-3$ diagonales qui y entrent ont d'extrémités, c'est-à-dire $2n-6$ fois. Donc le nombre P_n s'obtiendra en divisant l'expression [2] par $2n-6$.

On aura donc

$$[3] \quad P_n = \frac{n(P_3P_{n-1} + P_4P_{n-2} + \dots + P_{n-1}P_3)}{2n-6}.$$

La comparaison des deux formules [1] et [3] conduit facilement à la seconde des formules proposées

$$P_{n+1}=\frac{4n-6}{n}P_n.$$

IX.

Désignons par D_n le nombre des dérangements relatifs aux permutations des n premiers nombres, par $[n]$ le nombre des permutations de ces nombres, et cherchons une relation entre D_{n+1} et D_n.

Écrivons le nombre $n+1$ dans chaque arrangement de n nombres et faisons-lui parcourir les diverses positions qu'il peut occuper. En le plaçant à la gauche de tous les termes, il augmente évidemment de n le nombre des dérangements de chaque terme; en le plaçant entre le premier et le second nombre, il introduit dans chaque terme $n-1$ nouveaux dérangements, et ainsi de suite.

Dans la première position, le nombre des dérangements est donc $D_n+n\,[n]$; dans la seconde position, il est $D_n+(n-1)[n]$; dans la troisième, il est $D_n+(n-2)\,[n]$. Donc on a

$$D_{n+1}=(n+1)D_n+\frac{n(n+1)}{2}[n]=(n+1)D_n+\frac{n}{2}[n+1].$$

Cette équation donne celle-ci :

$$D_{n+2}=(n+2)D_{n+1}+\frac{n+1}{2}[n+2].$$

Des deux équations on déduit

$$D_{n+2}=(n+1)(n+2)D_n+\frac{2n+1}{2}[n+2];$$

de même

$$D_{n+3}=(n+1)(n+2)(n+3)D_n+\frac{3n+3}{2}[n+3],$$

et, en général,

$$D_{n+p}=(n+1)(n+2)\ldots(n+p)D_n+\tfrac{1}{2}\left[pn+\frac{p(p-1)}{2}\right][n+p];$$

faisant $n=1$, on a $D_1=0$;

Digitized by Google

donc

$$D_{p+1} = \frac{p(p+1)}{4}[p+1];$$

changeant $p+1$ en n,

$$D_n = \frac{n(n-1)}{4}[n] = \frac{n(n-1)}{4} . 1 . 2 . 3 \ldots n.$$

X.

On a identiquement

$$a^m + b^m = [(a+b)-b]^m + b^m = (a+b)^m - \frac{m}{1}(a+b)^{m-1}b$$
$$+ \frac{m(m-1)}{1.2}(a+b)^{m-2}b^2 + \ldots + m(a+b)b^{m-1};$$

d'où

$$[1] \qquad \frac{a^m+b^m}{a+b} = (a+b)^{m-1} - \frac{m}{1}(a+b)^{m-2}b$$
$$+ \frac{m(m-1)}{1.2}(a+b)^{m-3}b^2 \ldots + mb^{m-1};$$

d'un autre côté, on a

$$[2] \qquad \frac{a^m+b^m}{a+b} = a^{m-1} - a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 - \ldots + b^{m-1}.$$

Si on identifie les coefficients de b^n dans [1] et [2], on obtient l'égalité

$$\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n)}{1.2.3\ldots n} - \frac{m}{1} . \frac{(m-2)(m-3)\ldots(m-n)}{1.2.3\ldots(n-1)}$$
$$+ \frac{m(m-1)}{1.2} . \frac{(m-3)\ldots(m-n)}{1.2.3\ldots(n-2)} \ldots = \pm 1,$$

qui se réduit à la proposée, quand on met

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n)}{1.2.3\ldots n}$$

en facteur commun.

XI.

Puisqu'on suppose

$$(x+a)^m = x^m + Ax^{m-1}a + Bx^{m-2}a^2 + Cx^{m-3}a^3 + \dots,$$

on aura

$$(x+a)^{m+1} = (x+a)^m(x+a) = (x^m + Ax^{m-1}a + Bx^{m-2}a^2 + \dots)(x+a),$$

et, en développant ce dernier produit,

$$(x+a)^{m+1} = x^{m+1} + (1+A)x^m a + (A+B)x^{m-1}a^2 + (B+C)x^{m-2}a^3 + \dots,$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Il suit de là qu'on peut former les coefficients des puissances successives de $x+a$ par de simples additions, comme on le voit dans le tableau suivant, connu sous le nom de *triangle arithmétique de Pascal.*

1,	1,	1,	1,	1,	1,	1...
	1,	2,	3,	4,	5,	6...
		1,	3,	6,	10,	15...
			1,	4,	10,	20...
				1,	5,	15...
					1,	6...
						1...

Chaque terme de ce tableau se forme en ajoutant le nombre qui est à gauche à celui qui est au-dessus. Comme la troisième colonne renferme les coefficients de $(x+a)^2$, la colonne suivante doit renfermer les coefficients de la troisième puissance, et ainsi de suite.

Les nombres de la seconde ligne horizontale sont appelés nombres figurés du premier ordre ; ceux de la troisième ligne, nombres figurés du second ordre, et ainsi des autres.

Il résulte évidemment de la loi de formation que le p^{me} nombre figuré du $(n+1)^{me}$ ordre est égal à la somme des p prémiers nombres figurés du n^{me} ordre : c'est sur cette propriété que nous nous sommes appuyés pour trouver la seconde formule de l'exercice II.

XII.

1° La loi indiquée se vérifie aisément pour $n = 1, 2, 3$, etc. Il suffira donc de démontrer que si elle a lieu pour le n^{me} cercle, elle sera vraie pour le $(n+1)^{me}$.

Supposons, en effet, que $1, A, B, C \ldots$ étant les coefficients de la $(n-1)^{me}$ puissance du binome, les nombres écrits sur le n^{me} cercle soient de la forme

$$x_1 + Ax_2 + Bx_3 + \ldots + x_n, \quad x_2 + Ax_3 + Bx_4 + \ldots + x_{n+1} \ldots;$$

les nombres écrits sur le $(n+1)^{me}$ cercle seront de la forme

$$x_1 + (1+A)x_2 + (A+B)x_3 + (B+C)x_4 + \ldots + x_{n+1},$$

polynome dont les coefficients sont bien ceux de la n^{me} puissance du binome, d'après l'exercice XI.

2° Dans les polynomes écrits autour du $(n+1)^{me}$ cercle, il est visible que chaque lettre $x_1, x_2 \ldots$ occupe successivement toutes les places et chacune une seule fois. La somme de ces nombres sera donc

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_m)\left[1 + n + \frac{n(n-1)}{1.2} + \ldots + 1\right],$$

ou bien $$(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_m) \times 2^n,$$

puisque

$$1 + n + \frac{n(n-1)}{1.2} + \ldots + 1 = (1+1)^n = 2^n.$$

XIII.

Soit $$A = a_1^{e_1} a_2^{e_2} a_3^{e_3} \ldots a_\alpha^{e_\alpha}$$

le nombre proposé, $a_1, a_2, \ldots a_\alpha$ étant α nombres premiers inégaux. Un diviseur contenant n facteurs premiers sera de la forme

$$a_1^{x_1} a_2^{x_2} a_3^{x_3} \ldots a_n^{x_n}.$$

Si on fait varier, dans cette expression, x_1 depuis 1 jusqu'à e_1; x_2 depuis 1 jusqu'à e_2, etc., on obtiendra $e_1\, e_2 \ldots e_n$ diviseurs

Digitized by Google

renfermant les n facteurs premiers a_1, a_2, a_3 ... a_n. Pour avoir les autres, il suffira de former, avec les α facteurs premiers, tous les produits possibles n à n, et chaque produit fournira un nombre de diviseurs égal au produit des exposants correspondants. Donc le nombre cherché est égal à la somme des produits n à n des exposants e_1, e_2 ... e_n.

EXEMPLE. Le nombre des diviseurs de

$$360 = 2^3 . 3^2 . 5^1,$$

ne renfermant que deux facteurs premiers, est

$$3.2 + 3.1 + 2.1 = 11.$$

CHAPITRE XIV.

I.

(Il faut lire dans l'énoncé $u^2 = v^2 + z$.)

Désignons par E_u la partie entière de u, par E_v la partie entière de v, et posons

$$u = E_u + u',$$
$$v = E_v + v',$$

u' et v' étant des fractions dont le dénominateur est de degré plus élevé que le numérateur : la substitution de ces valeurs dans l'équation

$$u^2 = v^2 + z$$

donne $\quad E_u^2 + 2u'E_u + u'^2 = E_v^2 + 2v'E_v + v'^2 + z,$

d'où $\quad E_u^2 - E_v^2 = z + v'^2 - u'^2 + 2v'E_v - 2u'E_u.$

La partie entière du second membre est évidemment de degré moindre que v ou que u (ce qui est la même chose) : il doit donc en être de même du premier; mais celui-ci est égal à

$$(E_u + E_v)(E_u - E_v)$$

et ne peut être de degré inférieur à v ou à E_v que si on a

$$E_u - E_v = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

II.

La surface du triangle est le produit de la base $\frac{x^2}{y}$ par la moitié de la hauteur $\frac{y^2}{2x}$, c'est-à-dire $\frac{xy}{2}$. On a, par conséquent, d'après l'expression connue de la surface en fonction des côtés,

$$\frac{xy}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{x^2}{y}+x+y\right)\left(\frac{x^2}{y}+x-y\right)\left(\frac{x^2}{y}-x+y\right)\left(x+y-\frac{x^2}{y}\right)}.$$

C'est cette équation dont le premier membre devient un carré parfait quand on y fait passer tous les termes, après avoir chassé les radicaux et les dénominateurs.

On peut aussi simplifier la solution en remarquant que le triangle est rectangle, puisque sa surface est mesurée par la moitié du produit de deux côtés. Le carré de l'hypoténuse étant égal à la somme des carrés des deux autres côtés, et l'un de ces carrés étant, d'après l'énoncé, moyen proportionnel entre l'autre carré et le carré de l'hypoténuse, on voit qu'il est la plus grande partie du carré de l'hypoténuse divisé en moyenne et extrême raison. Cette considération fait connaître les rapports des côtés.

III.

La racine est $l^2 + 2ml + mn.$

IV.

La racine est $(c^2 + d^2)(a^2 + b^2).$

V.

La racine est $ac + ad + bd.$

Digitized by Google

VI.

La racine est $a + b + c + d.$

VII.

La valeur de x est $p + q.$

VIII.

La valeur de x est $p + q.$

IX.

La racine est

$$a^{-\frac{1}{rv}} + a^{\frac{1}{2rv}}\, b^{\frac{1}{2r}} = \sqrt[r]{a^{-\frac{1}{v}}} + \sqrt[2]{\sqrt[r]{a^v b}}.$$

CHAPITRE XV.

I.

Si l'on pose

$$4x^4 - 4px^3 + 4qx^2 - 2p(m+1)x + (m+1)^2 = (2x^2 + \alpha x + \beta)^2,$$

il en résulte

$$-4p = 4\alpha,$$
$$\alpha^2 + 4\beta = 4q,$$
$$2\alpha\beta = -2p(m+1),$$
$$\beta^2 = (m+1)^2;$$

d'où l'on déduit

$$\alpha = -p,$$
$$\beta = q - \frac{\alpha^2}{4} = q - \frac{p^2}{4},$$

Digitized by Google

et, par suite, les équations de conditions sont

$$\frac{q-p^2}{4}=m+1,$$

$$\left(\frac{q-p^2}{4}\right)^2=(m+1)^2.$$

Ces équations n'en font évidemment qu'une seule.

II.

La condition demandée est

$$(BD-2AE)^2=(B^2-4AC)(D^2-4AF),$$

et l'on a

$$2x^2-21xy-11y^2-x+34y-3=(2x+y-3)(x-11y+1).$$

III.

On a

$$4(x^4+x^3+x^2+x+1)=(2x^2+x+2)^2-x^2.$$

IV.

Si l'on a

$$K(a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2)-(x-\alpha)^2-(y-\beta)^2=-(mx+qy+p)^2,$$

on voit, immédiatement, que m ou n doivent être nuls, car sans cela le second membre contiendrait un terme en xy, tandis que le premier n'en contient pas. Supposons $m=0$; on aura, en identifiant :

[1] $$Ka^2-1=-n^2,$$

[2] $$Kb^2-1=0,$$

[3] $$2\alpha=0,$$

[4] $$2\beta=-2np,$$

[5] $$-Ka^2b^2-\alpha^2\beta^2=-p^2.$$

L'équation [2] donne $K=\frac{1}{b^2}$,

Digitized by Google

cette valeur, substituée dans [1], donne

$$n = \pm \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a},$$

ce qui exige que b soit supérieur à a; autrement il faudrait supposer $n = 0$.

On tire ensuite des équations [3], [4] et [5]

$$\alpha = 0, \quad \beta = \mp\sqrt{b^2 - a^2}, \quad p = \pm b.$$

Les signes devant être combinés de telle sorte que β soit de signe contraire à np, il existe deux systèmes d'indéterminées répondant à la question.

V.

L'équation

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = (\alpha x + \beta y)^2 + (\gamma x + \delta y)^2$$

fournit trois équations seulement entre les quatre inconnues α, β, γ, δ. Elle admet donc une infinité de solutions. Néanmoins, il n'y a de solutions réelles que si l'on a

$$B^2 < AC, \quad A > 0, \quad C > 0.$$

VI.

On déduit de l'égalité proposée

[1] $$\alpha^3 + \gamma^3 = A,$$

[2] $$\alpha^2\beta + \gamma^2\delta = B,$$

[3] $$\alpha\beta^2 + \gamma\delta^2 = C,$$

[4] $$\beta^3 + \delta^3 = D.$$

Si l'on pose

[5] $$\alpha\delta - \beta\gamma = \omega,$$

Digitized by Google

on aura identiquement

[6] $$AC - B^2 = \omega^2 \alpha\gamma = A_1,$$

[7] $$AD - BC = \omega^2(\alpha\delta + \beta\gamma) = B_1,$$

[8] $$BD - C^2 = \omega^2 \beta\delta = C_1,$$

[9] $$B_1^2 - 4A_1C_1 = \omega^6,$$

l'équation [9] fait connaître ω. ω étant connu, les équations [6], [7] et [8] font connaître $\alpha\gamma$, $\beta\delta$ et $\alpha\delta + \beta\gamma$, on connaît d'ailleurs $\alpha\delta - \beta\gamma$, et, d'après cela, on déterminera, sans peine, α, β, γ et δ.

CHAPITRE XVI.

I.

Les deux dernières équations de l'énoncé doivent être

[2] $$xy - uv = 2 - 2(u + v),$$

[3] $$x^2 + y^2 = u^2 + v^2.$$

Si on élève au carré l'équation

[1] $$x + y + u + v = 2,$$

après avoir fait passer $u + v$ dans le second membre, on a

$$x^2 + 2xy + y^2 = 4 - 4(u + v) + u^2 + 2uv + v^2,$$

ou $$x^2 + y^2 + 2(xy - uv) = 2[2 - 2(u + v)] + u^2 + v^2,$$

ce qui, à cause de l'équation [2], se réduit bien à l'équation [3].

II.

Les deux égalités proposées reviennent aux proportions

$$b : a + c :: 1 : 2,$$

$$\frac{1}{c} : \frac{1}{b} + \frac{1}{d} :: 1 : 2;$$

donc, à cause du rapport commun,

$$b : a + c :: \frac{1}{c} : \frac{1}{b} + \frac{1}{d};$$

d'où, en égalant le produit des extrêmes à celui des moyens,

$$1 + \frac{b}{d} = \frac{a}{c} + 1;$$

ou, enfin,

$$\frac{b}{d} = \frac{a}{c},$$

ce qui n'est autre chose que la proportion

$$a : b :: c : d.$$

III.

L'élimination de ρ entre les deux équations

$$\rho^2 = R^2 + (\rho - H')^2,$$
$$\rho^2 = r^2 + (\rho - h')^2,$$

conduit à l'équation

$$\frac{R^2 + H'^2}{H'} = \frac{r^2 + h'^2}{h'}.$$

Cette équation combinée avec

$$H' - h' = H,$$

permet de trouver H' et h' en fonction de h. Les valeurs trouvées pour H' et h' étant substituées dans la seconde expression du segment, doivent la rendre identique à la première.

IV.

Si on pose

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = \frac{D}{d} = m,$$

et qu'on remplace A par ma, B par mb, etc., dans l'égalité proposée, celle-ci devient

$$\sqrt{ma^2} + \sqrt{mb^2} + \sqrt{mc^2} + \sqrt{md^2}$$
$$= \sqrt{(ma + mb + mc + md)(a + b + c + d)},$$

ou bien

$$a\sqrt{m}+b\sqrt{m}+c\sqrt{m}+d\sqrt{m}=(a+b+c+d)\sqrt{m},$$

ce qui est évident.

V.

Si a est le premier terme de la progression, on a

$$S_m \;\; = a\frac{q^m-1}{q-1},$$

$$S_{m-1} = a\frac{q^{m-1}-1}{q-1}.$$

La somme des produits deux à deux des m premiers termes est égale à la moitié du carré de la somme des termes diminuée de la somme des carrés de ces termes, et cette dernière somme est $a^2.\frac{q^{2m}-1}{q-1}$. Donc l'égalité qu'il s'agit de vérifier est la suivante :

$$\frac{1}{2}\left[a^2\left(\frac{q^m-1}{q-1}\right)^2 - a^2\frac{q^{2m}-1}{q-1}\right] = \frac{q}{q+1}\,a^2\,\frac{q^m-1}{q-1}\cdot\frac{q^{m-1}-1}{q-1},$$

ce qui n'offre aucune difficulté.

VI.

Soient $\qquad A,\ \ B,\ \ A+B,\ \ A+2B,$

quatre termes consécutifs de la série en question, on a identiquement

$$(A+B)^2-B(A+2B)=A^2+AB-B^2=-[B^2-A(A+B)].$$

Ce qui fait voir que la différence entre le carré d'un terme et le produit des termes qui le comprennent, ne change pas en valeur absolue quand on passe d'un terme au suivant Or, si on prend les trois premiers termes de la suite, on a

$$2^2-1.3=1;$$

donc cette différence est constamment égale à l'unité.

Digitized by Google

VII.

Si on élève au carré les deux membres de la première équation, on a

$$[1] \quad (y-\beta)^2+(x-\alpha)^2+(y-\beta')^2+(x-\alpha')^2$$
$$+2\sqrt{[(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2][(y-\beta')^2+(x-\alpha')^2]}=(\beta-\beta')^2+(\alpha-\alpha')^2;$$

mais il est facile de voir que

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2+(y-\beta')^2+(x-\alpha)^2-(\beta-\beta')^2-(\alpha-\alpha')^2$$
$$=2[(y-\beta)(y-\beta')+(x-\alpha)(x-\alpha')],$$

et que

$$[(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2][(y-\beta')^2+(x-\alpha')^2]$$
$$=[(y-\beta)(y-\beta')+(x-\alpha)(x-\alpha')]^2+[(y-\beta)(x-\alpha')-(y-\beta')(x-\alpha)]^2.$$

On aura donc, en isolant le radical dans le second membre et élevant au carré après avoir divisé par 2,

$$[(y-\beta)(y-\beta')+(x-\alpha)(x-\alpha')]^2$$
$$=[(y-\beta)(y-\beta')+(x-\alpha)(x-\alpha')]^2+[(y-\beta)(x-\alpha')-(y-\beta')(x-\alpha)]^2;$$

et en supprimant la partie commune aux deux membres

$$[(y-\beta)(x-\alpha')-(y-\beta')(x-\alpha)]^2=0;$$

équation qui ne peut être satisfaite que si l'on a

$$\frac{y-\beta}{x-\alpha}=\frac{y-\beta'}{x-\alpha'}.$$

VIII.

Posons

$$[1] \quad \alpha x'+\alpha' y'+\alpha'' z'=x,$$
$$\beta x'+\beta' y'+\beta'' z'=y,$$
$$\gamma x'+\gamma' y'+\gamma'' z'=z.$$

Si on multiplie successivement ces équations par α, β, γ, et qu'on les ajoute en ayant égard aux conditions

$$[2] \qquad \begin{aligned} \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' &= 0, \\ \alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' &= 0, \\ \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' &= 0, \end{aligned}$$

on obtiendra $x' = \alpha x + \beta y + \gamma z$; on obtiendra de la même manière y' et z'. On aura donc

$$[3] \qquad \begin{aligned} x' &= \alpha x + \beta y + \gamma z, \\ y' &= \alpha' x + \beta' y + \gamma' z, \\ z' &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z. \end{aligned}$$

Si maintenant on élève au carré les équations [1], et qu'on les ajoute, en ayant égard aux conditions [2] et aux suivantes :

$$[4] \qquad \begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1, \\ \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 &= 1, \\ \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 &= 1, \end{aligned}$$

on aura

$$[5] \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

D'un autre coté, si on traite de la même manière les équations [3], on arrive à

$$[6] \quad \begin{aligned} x'^2+y'^2+z'^2 = {} & (\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2)x^2+(\beta^2+\beta'^2+\beta''^2)y^2+(\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2)z^2 \\ & + 2(\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'')xy \\ & + 2(\alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'')xz \\ & + 2(\beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'')yz. \end{aligned}$$

Ces deux valeurs de $x'^2 + y'^2 + z'^2$ devant être les mêmes, quelles que soient les indéterminées x, y, z, on aura nécessairement (170)

$$[7] \quad \begin{aligned} \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' &= 0, \\ \alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'' &= 0, \\ \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' &= 0, \end{aligned} \qquad [8] \quad \begin{aligned} \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 &= 1, \\ \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 &= 1, \\ \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 &= 1, \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Digitized by Google

Pour démontrer la dernière formule, je remarque que les équations [2] donnent

$$\begin{aligned}\alpha^2\alpha'^2\alpha''^2 &= \alpha'\alpha''(\beta\beta'' + \gamma\gamma'')(\beta\beta' + \gamma\gamma') \\ &= \alpha'\alpha''\beta'\beta''\beta^2 + \alpha'\alpha''\gamma'\gamma''\gamma^2 + \alpha'\beta''\gamma\alpha''\beta\gamma' \\ &\quad + \alpha'\beta\gamma''\alpha''\beta'\gamma.\end{aligned}$$

Si nous changeons α et β l'un dans l'autre, ou α et γ, nous obtenons deux autres égalités, qui, ajoutées à celle-là, et en ayant égard à l'équation

$$\alpha^2\alpha'\alpha''(\beta'\beta'' + \gamma'\gamma'') = -\alpha'\alpha'^2\alpha''^2,$$

donnent

$$\begin{aligned}2(\alpha^2\alpha'^2\alpha''^2 + \beta^2\beta'^2\beta''^2 + \gamma^2\gamma'^2\gamma''^2) &= \alpha'\beta''\gamma\alpha''\beta\gamma' + \alpha''\beta\gamma'\alpha\beta'\gamma'' \\ &\quad + \beta'\gamma''\alpha'\beta''\gamma + \alpha'\beta\gamma''\alpha''\beta'\gamma \\ &\quad + \alpha''\beta'\gamma\alpha\beta''\gamma' + \alpha\beta''\gamma'\alpha'\beta\gamma'';\end{aligned}$$

or le second membre ne change pas quand on y permute α' en β, α'' en γ, et β'' en γ'. Il en est donc de même du premier, et l'on a, par suite,

$$\alpha^2\alpha'^2\alpha''^2 + \beta^2\beta'^2\beta''^2 + \gamma^2\gamma'^2\gamma''^2 = \alpha^2\beta^2\gamma^2 + \alpha'^2\beta'^2\gamma'^2 + \alpha''^2\beta''^2\gamma''^2.$$

IX.

L'équation proposée devient, en chassant les dénominateurs,

$$\begin{aligned}&(a' + x)(b' + x)(b + x) + (a' + x)(b' + x)(a + x) \\ &= (a + x)(b + x)(a' + x) + (a + x)(b + x)(b' + x).\end{aligned}$$

Comme elle doit avoir lieu quel que soit x, faisons $x = -a$; nous aurons

$$(a' - a)(b' - a)(b - a) = 0.$$

Si b est différent de a, cette égalité ne peut être satisfaite que si a' ou b' est égal à a, ce qui est au fond la même chose. Supposons donc $a' = a$; alors l'équation proposée revient à

$$\frac{1}{b + x} = \frac{1}{b' + x},$$

qui ne peut avoir lieu que si $b' = b$.

Si on avait $a = b$, on démontrerait de la même manière que l'on doit avoir $a' = b' = a$.

X.

L'équation du second degré qu'on obtient en chassant les dénominateurs, ne peut être identique que si $a' = a$ et $b' = b$.

XI.

Les équations proposées donnent

$$\frac{\gamma}{\beta'} = \frac{aa_1 + bc}{a_1c_1 - bb'},$$

$$\frac{\gamma}{\beta'} = \frac{a_1b_1 - cc'}{a'a_1 + b'c'},$$

et par conséquent $\dfrac{a_1b_1 - cc'}{a'a_1 + b'c'} = \dfrac{aa_1 + bc}{a_1c_1 - bb'}$;

d'où on tire, en chassant les dénominateurs, et en simplifiant,

$$a_1b_1c_1 = aa'a_1 + bb'b_1 + cc'c_1 + abc + a'b'c'.$$

CHAPITRE XVII.

I.

Posons $$\sqrt{a + b\sqrt{-1}} = p + q\sqrt{-1}.$$

Il en résulte, en élevant au carré,

$$a + b\sqrt{-1} = p^2 - q^2 + 2pq\sqrt{-1},$$

ce qui entraîne ces deux équations :

$$p^2 - q^2 = a,$$

$$2pq = b.$$

On en tire facilement

$$p = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}}, \quad q = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}},$$

valeurs réelles dont les signes doivent être combinés de manière que pq soit de même signe que b.

II.

En posant $x = z^3$, cette équation devient

$$2z^4 - 3z^2 = 20,$$

d'où l'on tire, pour z, les quatre valeurs

$$+2, \quad -2, \quad +\sqrt{\tfrac{5}{2}}\sqrt{-1}, \quad -\sqrt{\tfrac{5}{2}}\sqrt{-1},$$

et par suite, pour x, les valeurs

$$+8, \quad -8, \quad -\tfrac{5}{2}\sqrt{\tfrac{5}{2}}\sqrt{-1}, \quad +\tfrac{5}{2}\sqrt{\tfrac{5}{2}}\sqrt{-1}.$$

III.

Il faut lire : n désignant un nombre impair premier avec 3.

En substituant à x sa valeur, l'égalité à démontrer devient

$$\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)^n - \left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^n = 1.$$

Mais

$$\frac{1+\sqrt{-3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{3},$$

$$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3};$$

donc, en substituant et ayant égard à la formule de Moivre,

$$\cos\frac{n\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{n\pi}{3} - \cos\frac{2n\pi}{3} - \sqrt{-1}\sin\frac{2n\pi}{3} = 1.$$

Les imaginaires se détruisent, et n étant impair,

$$\cos\frac{2n\pi}{3} = -\cos\frac{n\pi}{3};$$

donc on a

$$2\cos\frac{n\pi}{3} = 1.$$

Digitized by Google

n ne peut être que de la forme $6k \pm 1$, et par conséquent $\cos \frac{n\pi}{3} = \cos \frac{\pm \pi}{3} = \frac{1}{2}$, ce qui vérifie l'égalité précédente, et par suite, l'égalité proposée.

IV.

Si on pose $$x^3 = z,$$

l'équation se réduit au second degré, et on en tire facilement

$$z = \cos \varphi \pm \sqrt{-1} \sin \varphi.$$

Par suite, $$x = \sqrt[3]{z} = \cos \frac{\varphi}{3} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{\varphi}{3}.$$

Cette formule donne 6 valeurs pour x, en remplaçant φ par tous les arcs qui ont le même sinus et le même cosinus. Les six racines distinctes de l'équation sont ainsi :

$$\cos \frac{\varphi}{3} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{\varphi}{3},$$

$$\cos \frac{2\pi + \varphi}{3} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{2\pi + \varphi}{3},$$

$$\cos \frac{4\pi + \varphi}{3} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{4\pi + \varphi}{3}.$$

V.

Soit $$r(\cos + \sqrt{-1} \sin \varphi)$$

l'expression cherchée. On doit avoir

$$r^m(\cos m\varphi + \sqrt{-1} \sin m\varphi) = 1,$$

équation qui donne $$r^m \sin m\varphi = 0,$$

$$r^m \cos m\varphi = 1.$$

Comme r ne peut être nul, on doit avoir

$$\sin m\varphi = 0,$$

$$\cos m\varphi = \frac{1}{r^m} = 1,$$

puisque r est essentiellement positif, et que, lorsque le sinus est nul, le cosinus doit être égal à 1 en valeur absolue.

Les arcs qui satisfont aux conditions ci-dessus, sont donnés par la formule

$$m\varphi = 2K\pi,$$

K étant un nombre entier quelconque, d'où

$$\varphi = \frac{2K\pi}{m}.$$

Par conséquent, les expressions imaginaires demandées sont comprises dans la formule

$$\cos\frac{2K\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{2K\pi}{m}.$$

VI.

Soit $x + y\sqrt{-1}$ l'expression cherchée. On doit avoir

$$(x + y\sqrt{-1})^3 = 1,$$

équation qui se partage en deux autres :

[1] $$x^3 - 3xy^2 = 1,$$

[2] $$3x^2y - y^3 = 0.$$

On peut d'abord satisfaire en faisant $y = 0$, $x = 1$, ce qui ne donne aucune expression imaginaire. Si on divise par y l'équation [2], elle devient

$$3x^2 - y^2 = 0,$$

d'où l'on tire $y^2 = 3x^2$; par suite, $-8x^3 = 1$,

et $$x = -\tfrac{1}{2},$$

d'où $$y = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}.$$

Digitized by Google

On trouve donc les deux solutions :

$$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

et l'on vérifie aisément que chacune d'elles est le carré de l'autre.

VII.

Pour démontrer cette formule, il suffit de développer le produit indiqué, en remplaçant α^3 par 1 et α^4 par α.

Si, dans la dernière formule de l'exercice VII, chap. II, on remplace

$$a^3+b^3+c^3-3abc \text{ par } (a+b+c)(a+b\alpha+c\alpha^2)(a+b\alpha^2+c\alpha),$$

et

$$a'^3+b'^3+c'^3-3a'b'c' \text{ par } (a'+b'+c')(a'+b'\alpha+c'\alpha^2)(a'+b'\alpha^2+c'\alpha),$$

on verra, en réunissant les facteurs analogues, que le premier membre revient à

$$(A+B+C)(A+B\alpha+C\alpha^2)(A+B\alpha^2+C\alpha),$$

ce qui démontre la formule proposée.

VIII.

Soient $\qquad \alpha+\beta\sqrt{-1}, \quad \gamma+\delta\sqrt{-1}$

les deux expressions imaginaires. Il s'agit de prouver, en premier lieu, que l'on a

$$\sqrt{(\alpha+\gamma)^2+(\beta+\delta)^2}<\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\sqrt{\gamma^2+\delta^2},$$

ou, en élevant au carré,

$$(\alpha+\gamma)^2+(\beta+\delta)^2<\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+2\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2)}.$$

Cette inégalité se réduit à

$$\alpha\gamma+\beta\delta<\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2)},$$

Digitized by Google

ou, ce qui revient au même,

$$\alpha\gamma+\beta\delta<\sqrt{(\alpha\gamma+\beta\delta)^2+(\alpha\delta-\beta\gamma)^2},$$

inégalité évidente.

En second lieu, on doit avoir

$$\sqrt{(\alpha+\gamma)^2+(\beta+\delta)^2}<\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\sqrt{\gamma^2+\delta^2}.$$

Par des transformations semblables, on ramènera cette inégalité à cette autre, qui est évidente :

$$\alpha\gamma+\beta\delta>\sqrt{(\alpha\gamma+\beta\delta)^2-(\alpha\delta-\beta\gamma)^2}.$$

CHAPITRE XVIII.

I.

$\sqrt{a^2+1}$ étant compris entre a et $a+1$, posons

[1] $$\sqrt{a^2+1}=a+\frac{1}{x},$$

d'où $$x=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}-a}=\sqrt{a^2+1}+a.$$

On voit par là que x est compris entre $2a$ et $2a+1$, de sorte que si l'on fait $x=2a+\frac{1}{y}$, on aura

$$\sqrt{a^2+1}=a+\cfrac{1}{2a+\cfrac{1}{y}}.$$

Pour déterminer y, nous avons l'équation

$$\sqrt{a^2+1}+a=2a+\frac{1}{y},$$

ou

[2] $$\sqrt{a^2+1}=a+\frac{1}{y},$$

Digitized by Google

ce qui n'est autre chose que l'équation [1] dans laquelle y remplacerait x. On aura donc $y=x$, et, par suite,

$$\sqrt{a^2+1}=a+\cfrac{1}{2a+\cfrac{1}{2a+\cfrac{1}{2a+\ldots}}}$$

II.

1° On a identiquement

$$b-\frac{1}{c}=b-1+\frac{c-1}{c}=b-1+\cfrac{1}{\cfrac{c}{c-1}}=b-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{c-1}},$$

et par conséquent

$$a+\cfrac{1}{b-\cfrac{1}{c}}=a+\cfrac{1}{b-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{c-1}}}.$$

2° En posant $q=c-\frac{1}{d}$, on a d'abord

$$a+\cfrac{1}{b-\cfrac{1}{c-\cfrac{1}{d}}}=a+\cfrac{1}{b-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{q-1}}};$$

mais $q-1=c-1-\frac{1}{d}=c-2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{d-1}}$; donc enfin

$$a+\cfrac{1}{b-\cfrac{1}{c-\cfrac{1}{d}}}=a+\cfrac{1}{b-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{c-2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{d-1}}}}}.$$

III.

Dans une fraction continue de forme ordinaire, les réduites de rang pair forment une suite décroissante, et les réduites de

Digitized by Google

rang impair une suite croissante, mais non indéfiniment, puisqu'une réduite de rang impair ne peut jamais surpasser une réduite de rang pair. Il suit de là que, quelque loin que la fraction continue se prolonge, ces deux espèces de réduites sont toujours finies et qu'elles convergent vers la même limite, puisque la différence entre deux réduites consécutives diminue indéfiniment à mesure qu'on prend un nombre de plus en plus grand de fractions intégrantes; c'est cette limite qu'on appelle valeur de la fraction continue prolongée à l'infini.

Considérons maintenant une fraction périodique simple, et posons

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \vdots + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{a + \text{etc.}}}}}}$$

On peut écrire

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \vdots + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{x}}}}.$$

Si on désigne par $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$ les deux réduites correspondantes aux quotients incomplets p et q de la première période, la fraction continue sera encore représentée par (**195**)

$$\frac{Qx+P}{Q'x+P'};$$

et, par conséquent, on aura

$$x = \frac{Qx+P}{Q'x+P'},$$

ce qui donne $$Q'x^2+(P'-Q)x-P=0:$$

équation du second degré à racines réelles, l'une positive, l'autre

négative. La première seule représente la valeur de la fraction continue.

En second lieu, soit une fraction périodique mixte, et posons

$$[1] \qquad x = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \vdots + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \vdots + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \text{etc.}}}}}}$$

soit

$$y = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \vdots + \cfrac{1}{a + \text{etc.}}}}$$

D'après ce que nous venons de voir, y sera la racine positive d'une équation de la forme

$$[2] \qquad Q'y^2 + (P' - Q)y - P = 0.$$

Si maintenant on désigne par $\frac{R}{R'}$, $\frac{S}{S'}$ les deux dernières réduites qui correspondent à la partie non périodique, et qu'on remplace $\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \text{etc.}}}$ par y, on aura encore

$$[3] \qquad x = \frac{Sy + R}{S'y + R'};$$

et, en éliminant y entre les équations [2] et [3], on arrivera nécessairement à une équation du second degré en x.

IV.

Supposons qu'on ait réduit $\frac{A}{B}$ en fraction continue. Soit $\frac{Q}{Q'}$

une réduite de rang impair et y le quotient complet qui vient après. On a

$$\frac{A}{B}=\frac{Q}{Q'}+\frac{1}{Q'(Q'y+P')};$$

si l'on pose
$$\frac{1}{Q'(Q'y+P')}=\frac{\alpha'}{B}<\frac{\alpha}{B},$$

on aura
$$\frac{A-\alpha'}{B}=\frac{Q}{Q'},$$

en sorte que $A-\alpha'$ et B auront un plus grand commun diviseur égal à $\frac{A-\alpha'}{Q}$ ou à $\frac{B}{Q'}$. Ce plus grand commun diviseur devant être au moins égal à ε, on aura

$$\frac{B}{Q'}>\varepsilon, \quad \text{ou} \quad Q'<\frac{B}{\varepsilon}.$$

On choisira donc, parmi les dénominateurs des réduites de rang impair, le plus grand qui satisfasse à cette inégalité, et si on prend α de telle sorte que

$$\alpha>\frac{B}{Q'(Q'y+P')},$$

on aura rempli toutes les conditions du problème.

V.

Les premières réduites de la fraction continue sont

$$(a+b)\frac{a-b}{a+b},\quad (a+b)\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2},\quad (a+b)\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3},\quad (a+b)\frac{a^4+b^4}{a^4-b^4}\cdots$$

La loi de ces réduites est évidente, et on démontrerait facilement que si elle est vraie jusqu'à la n^{me} réduite, elle l'est encore pour la suivante, d'où il suit qu'elle est générale.

D'après cela, il suffit, pour démontrer la question proposée, de faire voir que

$$\frac{a^n\mp b^n}{a^n\pm b^n}$$

Digitized by Google

a pour limite l'unité quand n augmente indéfiniment. A cet effet, nous distinguerons trois cas :

1° Si b est moindre que a, on pourra mettre le rapport précédent sous la forme

$$\frac{1 \mp \left(\frac{b}{a}\right)^n}{1 \pm \left(\frac{b}{a}\right)^n}.$$

Or, à mesure que n augmente, $\left(\frac{b}{a}\right)^n$ tend vers 0 et on peut trouver une valeur de n assez grande pour que $\left(\frac{b}{a}\right)^n$ soit aussi petit que l'on voudra. Donc, dans ce cas, les réduites tendent vers la limite $a+b$, et l'égalité proposée est vérifiée.

2° Si $a=b$, le raisonnement que nous venons de faire est en défaut; et, en effet, dans ce cas, les réduites sont alternativement nulles et infinies et ne convergent vers aucune limite fixe.

3° Si on a $b>a$, le rapport $\frac{a^n \mp b^n}{a^n \pm b^n}$ converge vers la limite -1; l'égalité proposée n'est plus vraie, mais elle peut être remplacée par la suivante :

$$-(a+b)=a-b+\cfrac{4ab}{2(a-b)+\cfrac{4ab}{2(a-b)+\ldots}}$$

VI.

Nous démontrerons d'abord ce théorème : si $\frac{P}{P'}, \frac{Q}{Q'}, \frac{R}{R'}$ sont les dernières réduites de la fraction continue

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{\vdots}{\;+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r}}}}}},$$

$\frac{R}{Q}$ sera la dernière réduite de la fraction inverse

$$r+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{p+\vdots+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a}}}}}.$$

En effet, on a (**194**) $R=Qr+P$. P étant moindre que Q, on voit que r est la partie entière du quotient de R par Q, et que P en est le reste. De même, si on divise Q par P, on obtiendra pour quotient q et pour reste le numérateur de la réduite qui précède $\frac{P}{P'}$, et ainsi de suite. Mais ces opérations ne sont autres que celles qu'il faut faire pour réduire $\frac{R}{Q}$ en fraction continue : donc

$$\frac{R}{Q}=r+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{p+\vdots+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a}}}}}.$$

Considérons maintenant les fractions continues

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{a+\ldots}}}},\qquad d+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{d+\ldots}}}}$$

La première est la racine positive (Exercice III) de l'équation

$$[1]\qquad R'x^2+(Q'-R)x-Q=0,$$

et la seconde, d'après la propriété que nous venons de démontrer, est la racine positive de cette autre équation

$$[2]\qquad Qx^2+(Q'-R)x-R'=0.$$

Or, l'équation [2] n'est autre chose que l'équation [1] dans laquelle on aurait changé x en $-\frac{1}{x}$. Donc la seconde racine de l'équation [1] est égale à

$$-\left(\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\ldots}}}}\right).$$

CHAPITRE XIX.

I.

La question proposée revient à chercher une valeur de z qui rende entières les expressions

$$\frac{z-\alpha}{a},\quad \frac{z-\beta}{b},\quad \frac{z-\gamma}{c},\ldots\quad \frac{z-\lambda}{l};$$

c'est un cas particulier d'un problème déjà traité (**214**) et qui admet une infinité de solutions.

Parmi l'infinité de nombres qui résolvent le problème, il y en a un et un seul, moindre que $abc\ldots l$: il y en a un, car si les conditions imposées sont remplies, elles le seront encore évidemment si on augmente ou diminue le nombre trouvé d'un multiple quelconque de $abc\ldots l$, ce qui permettra toujours d'arriver à une solution moindre que $abc\ldots l$; il n'y en a qu'un, car si deux nombres z et z', tous deux moindres que $abc\ldots l$, donnaient les mêmes restes, on aurait

$$\begin{aligned} z-z' &= \text{un multiple de } a = \text{un multiple de } b = \ldots \\ &= \text{un multiple de } l, \end{aligned}$$

Digitized by Google

et, par suite, puisque a, b, c,...l sont premiers entre eux,

$$z - z' = \text{un multiple de } abc\ldots l,$$

ce qui est impossible, $z-z'$ étant moindre que $abc\ldots l$.

II.

Considérons d'abord le cas de deux nombres a et b. Posons $m = E_a$, $n = E_b$; désignons par

[1] $$\alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \alpha_3,\ldots \alpha_m,$$

les nombres inférieurs et premiers à a, et par

[2] $$\beta_1,\quad \beta_2,\quad \beta_3,\ldots \beta_n,$$

les nombres inférieurs et premiers à b.

Tout nombre premier avec ab doit, si on le divise par a, donner pour reste un des termes de la suite [1], et si on le divise par b, un des termes de la suite [2]. Mais parmi les nombres moindres que ab, il n'y en a qu'un qui soit à la fois un multiple de $a + \alpha_p$ et un multiple de $b + \beta_q$. Donc il y aura autant d'entiers inférieurs et premiers à ab que de manières de combiner un terme de la première suite avec un terme de la seconde, c'est-à-dire mn ou $E_a E_b$. Donc

$$E_{ab} = E_a E_b.$$

Maintenant, c étant premier avec a et b, et par suite avec ab, on aura de même

$$E_{ab.c} = E_{ab} E_c,$$

ou

$$E_{abc} = E_a E_b E_c;$$

ce théorème s'étendrait successivement, de la même manière, au cas de 4, 5,...n facteurs.

III.

D'après le théorème précédent, il suffit pour obtenir E_N, de connaître E_{a^α}, E_{b^β},...

Digitized by Google

Or, parmi les a^α nombres inférieurs à a^α, il n'y a que les suivants

$$a,\quad 2a,\quad 3a,\ldots a^{\alpha-1}.a$$

au nombre de $a^{\alpha-1}$ qui ne soient pas premiers avec a^α; donc

$$E_{a^\alpha} = a^\alpha - a^{\alpha-1} = a^{\alpha-1}(a-1).$$

On aura de même

$$E_{b^\beta} = b^{\beta-1}(b-1),$$
$$E_{c^\gamma} = c^{\gamma-1}(c-1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$E_{l^\lambda} = l^{\lambda-1}(l-1);$$

donc $$E_N = a^{\alpha-1}(a-1)b^{\beta-1}(b-1)\ldots l^{\lambda-1}(l-1),$$

ou, comme on le voit facilement,

$$E_N = N\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{l}\right).$$

IV.

On a identiquement

$$x^2 - xy + y^2 = (x - \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}y\sqrt{-3})(x - \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{2}y\sqrt{-3}).$$

Nous pouvons poser

[1] $$x - \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}y\sqrt{-3} = (\alpha + \beta\sqrt{-3})^3,$$

[2] $$x - \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{2}y\sqrt{-3} = (\alpha - \beta\sqrt{-3})^3,$$

ce qui donnera $$z^3 = (\alpha^2 + 3\beta^2)^3.$$

On satisfera aux équations [1] et [2] en posant

$$x - \tfrac{1}{2}y = \alpha^3 - 9\alpha\beta^2,$$
$$\tfrac{1}{2}y = 3\beta\alpha^2 - 3\beta^3,$$

ou

[3] $$y = 6\beta(\alpha^2 - \beta^2),$$

[4] $$x = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta - 9\alpha\beta^2 - 3\beta^3,$$

et pour valeur correspondante de z, on aura

[5] $$z = \alpha^2 + 3\beta^2.$$

Digitized by Google

Les formules [3], [4] et [5] résolvent l'équation proposée, quelles que soient les indéterminées α et β, et donnent des solutions entières de cette équation quand on n'attribue à α et à β que des valeurs entières.

V.

1° Si a est positif, on posera

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}x+y.$$

En élevant au carré, ax^2 disparait comme terme commun aux deux membres, et il reste une équation du premier degré en x, qui, résolue, donne

$$x=\frac{y^2-c}{b-2y\sqrt{a}}.$$

2° Si c est positif, on pourra poser

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{c}+xy.$$

En élevant au carré, et divisant par x, facteur commun aux deux membres, on obtient

$$x=\frac{2y\sqrt{c}-b}{a-y^2}.$$

3° Si on a en même temps $a<0$, $c<0$, les deux transformations précédentes ne peuvent être employées. Mais il faut, dans ce cas, pour que le radical ait une signification, que les deux racines du trinome ax^2+bx+c soient réelles; autrement la quantité sous le radical serait constamment négative, et par suite le radical constamment imaginaire.

Soient alors α et β ces deux racines : on aura

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta).$$

Posons $\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=(x-\beta)y;$

il en résulte $a(x-\alpha)=(x-\beta)y^2;$

d'où l'on tire $x=\dfrac{\beta y^2+a\alpha}{y^2+a}.$

VI.

Soient $2y$ la corde cherchée, x sa distance au centre, et r le rayon ; on doit avoir

$$x^2+y^2=r^2.$$

Si r est un nombre entier, décomposable en deux carrés p^2 et q^2, on résoudra le problème en posant

$$x=p^2-q^2 \quad \text{ou} \quad 2pq,$$
$$y=2pq \quad \text{ou} \quad p^2-q^2,$$

et le problème admettra deux fois plus de solutions qu'il y aura de manières de décomposer r en deux carrés.

Si on demande seulement que ces deux longueurs soient commensurables avec le rayon, il suffira de poser

$$x=\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}r \quad \text{ou} \quad \frac{2pq}{p^2+q^2}r,$$
$$y=\frac{2pq}{p^2+q^2}r \quad \text{ou} \quad \frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}r,$$

quels que soient les entiers p et q. Le problème admettra, dans ce cas, une infinité de solutions.

VII.

Inscrivons dans le cercle une ligne polygonale de $m-1$ côtés dont chacun soit commensurable avec le rayon, ainsi que sa distance au centre. Je dis que si on joint les extrémités de cette ligne, on obtiendra un polygone de m côtés, remplissant toutes les conditions du problème.

En effet, chaque côté est le double du sinus de la moitié de l'arc soutendu, et sa distance au centre en est le cosinus. Or, lorsque

plusieurs arcs valent une demi-circonférence, le sinus et le cosinus de l'un d'eux s'expriment rationnellement en fonction des sinus et cosinus de tous les autres (voy. la *Trigonométrie*). Donc le dernier côté et sa distance au centre seront exprimés par des nombres commensurables.

Chaque diagonale étant le double sinus de la somme de plusieurs arcs dont les sinus et cosinus sont commensurables, sera également commensurable.

Le polygone se partage, au moyen de rayons menés aux sommets, en triangles ayant chacun une base et une hauteur commensurables. Chacun de ces triangles aura donc une surface commensurable, et il en sera de même de leur somme ou de la surface du polygone.

Application au triangle. En suivant la marche que nous venons d'indiquer, et en prenant pour unité le rayon du cercle circonscrit, on trouve que les côtés $2y$, $2y'$, $2y''$ d'un triangle, sa surface S, le rayon du cercle inscrit r, peuvent s'exprimer rationnellement au moyen de quatre indéterminées p, q, p', q', par les formules suivantes :

$$y=\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2},\quad y'=\frac{p'^2-q'^2}{p'^2+q'^2},\quad y''=\frac{2(pp'-qq')(pq'+qp')}{(p^2+q^2)(p'^2+q'^2)},$$

$$S=\frac{(p+q)(p'+q')(pp'+qq')}{(p^2+q^2)(p'^2+q'^2)},$$

$$r=\frac{pp'+qq'}{2(pp'-qq')}.$$

(Voir *Nouvelles Annales de mathématiques*, tome IX, p. 133.)

CHAPITRE XX.

I.

$$x=\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{q}{p-q}},$$

$$y=\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{p}{p-q}}.$$

II.

$$x = \frac{\log 5^4 . 11^2 - \log 7}{\log 3^2 . 5^3 . 11 - \log 7}.$$

III.

Si $a > b$, $$x = \frac{\log (a-b)}{\log (a+b)}.$$

Si $a < b$, $$x = \frac{\log (b-a)}{\log (b+a)}.$$

IV.

$$x = 4 + \frac{\log 4739 - \log 15646}{\log 5}.$$

V.

$$x = 2 \pm \sqrt{\frac{\log 400}{\log 3}}.$$

CHAPITRE XXI.

I.

On a

$$\frac{B' - A'}{B - A} = \frac{\frac{2AB}{A + \sqrt{AB}} - \sqrt{AB}}{B - A} = \frac{A(B - \sqrt{AB})}{(B-A)(A + \sqrt{AB})}.$$

Multipliant les deux termes du rapport par $B + \sqrt{AB}$,

$$\frac{B' - A'}{B - A} = \frac{A(B^2 - AB)}{(B-A)(A + \sqrt{AB})(B + \sqrt{AB})} = \frac{AB}{(A + \sqrt{AB})(B + \sqrt{AB})},$$

d'où $$\lim \frac{B' - A'}{B - A} = \frac{A^2}{(2A)^2} = \frac{1}{4}.$$

II.

$$\sqrt[3]{x^3+1}-x=\frac{(\sqrt[3]{x^3+1}-x)\left[\sqrt[3]{(x^3+1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+1}+x^2\right]}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}+x\sqrt[3]{x^2+1}+x^2}$$

$$=\frac{(\sqrt[3]{x^3+1})^3-x^3}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+1}+x^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}+x\sqrt[3]{x^3+1}+x^2};$$

donc
$$\lim(\sqrt[3]{x^3+1}-x)=0.$$

III.

Cette expression ne diffère de celles qui ont été traitées dans le cours de ce chapitre, qu'en ce qu'elle renferme des radicaux superposés. La recherche de sa vraie valeur se ramènera, comme au n° **263**, à la limite de fractions analogues à la suivante :

$$F=\frac{\sqrt[m]{Q+\sqrt[n]{R}}-\sqrt[m]{Q_a+\sqrt[n]{R_a}}}{x-a},$$

où Q et R sont des polynomes rationnels et Q_a, R_a ce que deviennent ces polynomes quand on y fait $x=a$.

Or, on a identiquement

$$F=\frac{\sqrt[m]{Q+\sqrt[n]{R}}-\sqrt[m]{Q_a+\sqrt[n]{R_a}}}{Q+\sqrt[n]{R}-Q_a-\sqrt[n]{R_a}}\cdot\frac{Q-Q_a+\sqrt[n]{R}-\sqrt[n]{R_a}}{x-a}$$

$$=\frac{\sqrt[m]{Q+\sqrt[n]{R}}-\sqrt[m]{Q_a+\sqrt[n]{R_a}}}{Q+\sqrt[n]{R}-Q_a-\sqrt[n]{R_a}}\left(\frac{Q-Q_a}{x-a}+\frac{\sqrt[n]{R}-\sqrt[n]{R_a}}{R-R_a}\cdot\frac{R-R_a}{x-a}\right),$$

et, par suite,

$$\lim F=\frac{1}{m\sqrt[m]{(Q_a+\sqrt[n]{R_a})^{m-1}}}\left[\lim\frac{Q-Q_a}{x-a}+\frac{1}{n\sqrt[n]{(R_a)^{n-1}}}\lim\frac{R-R_a}{x-a}\right].$$

En appliquant ces principes à l'expression proposée, on trouve que sa vraie valeur pour $x=1$ est $\frac{169}{64}$.

NOTE 1.

I.

$A(1+r)^{\frac{r}{q}}$ est plus grand ou plus petit que $A\left(1+\frac{pr}{q}\right)$ suivant que $(1+r)^p$ est plus grand ou plus petit que $\left(1+\frac{pr}{q}\right)^q$. En développant ces deux expressions, elles deviennent

$$1+pr+\frac{p(p-1)}{1-2}r^2+\ldots\frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{1.2.3\ldots k}r^k+\ldots r^p,$$

$$1+pr+\frac{q(q-1)}{1.2}\frac{p^2}{q^2}r^2+\ldots\frac{q(q-1)\ldots(q-k+1)}{1.2\ldots k}\frac{p^k}{q^k}r^k+\ldots\frac{p^q}{q^q}r^q.$$

Si q est plus grand que p, la seconde expression contient plus de termes que la première; nous aurons, par suite, prouvé qu'elle est plus grande si nous montrons que chacun de ses termes surpasse celui de même rang dans l'autre. Or, en comparant les termes de rang $k+1$, on voit qu'après les avoir divisés l'un et l'autre par $\frac{p^k r^k}{1.2\ldots k}$, on peut les mettre sous la forme

$$\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{2}{p}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{p}\right),$$

$$\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(1-\frac{2}{q}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{q}\right);$$

et, sous cette forme, il est évident que le second est le plus grand. On procéderait d'une manière toute semblable si q était moindre que p.

II.

Le premier système représente une dépense actuelle égale à

$$\left(D+\frac{D}{(1+r)^n}+\frac{D}{(1+r)^{2n}}+\ldots\right)+R\left(\frac{1}{1+r}+\frac{1}{(1+r)^2}+\ldots\right).$$

Digitized by Google

La dépense actuelle équivalente au second, est

$$\left(D' + \frac{D'}{(1+r)^n} + \ldots\right) + R'\left(\frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + \ldots\right).$$

Ces deux expressions deviennent, si on somme les progressions,

$$\frac{D}{1-\frac{1}{(1+r)^n}} + \frac{R}{1-\frac{1+r}{1}}, \quad \frac{D'}{1-\frac{1}{(1+r)^n}} + \frac{R'}{1-\frac{1}{(1+r)}}.$$

On doit préférer le système auquel correspond une moindre dépense actuelle.

III.

Quand on trouve pour n une valeur fractionnaire, on peut prouver qu'en adoptant le nombre entier immédiatement inférieur on ne serait pas acquitté, mais qu'en adoptant le nombre entier supérieur on payerait plus que la dette.

NOTE 2.

I.

On obtiendra $2\Sigma(a-b)^n$ en faisant successivement $x=a$, $x=b \ldots x=l$ dans l'expression

$$\varphi(x) = (x-a)^n + (x-b)^n + \ldots (x-l)^n,$$

et ajoutant les résultats. Or, en développant $\varphi(x)$, on a

$$\varphi(x) = mx^n - n\Sigma a x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\Sigma a^2 x^{n-2} + \ldots \Sigma a^n;$$

et, en substituant à x les valeurs $a, b, c \ldots l$, ajoutant et remarquant que les termes à égale distance des extrêmes sont égaux, on obtient la formule proposée.

Digitized by

II.

1° On a $(\Sigma a)^2 = \Sigma a^2 + 2\Sigma ab$;

et puisque $\Sigma ab = 0$, la première formule est évidente.

2° On a l'identité facile à vérifier :

$$\Sigma a \Sigma abc = 4\Sigma abcd + \Sigma abc^2.$$

De là et de l'équation $\Sigma abcd = \Sigma a \Sigma abc$, on déduit

$$3\Sigma abcd = -\Sigma abc^2;$$

or, on voit sans peine que

$$(\Sigma ab)^2 = \Sigma a^2 b^2 + 6\Sigma abcd + 2\Sigma abc^2;$$

et, par suite, d'après les égalités précédentes, $\Sigma a^2 b^2 = 0$, d'où l'on conclut

$$\Sigma a^4 = (\Sigma a)^4;$$

car on a identiquement

$$(\Sigma a)^4 = (\Sigma a^2)^2 = \Sigma a^4 + 2\Sigma a^2 b^2.$$

NOTE 3.

I.

On peut obtenir la racine à moins de $\frac{1}{10^n}$. Il ne faut pas conclure que l'on puisse trouver n chiffres décimaux exacts.

II.

On peut calculer la racine carrée avec une erreur moindre qu'une unité; mais on n'est pas assuré d'avoir exactement sa partie entière.

III.

Soit ε l'erreur commise sur la valeur de $\frac{60}{\rho}$. L'erreur qui en résultera sur $\sqrt{\frac{60}{\rho}}$ sera moindre que

$$\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\frac{60}{\rho}}}.$$

Cette erreur devant être moindre que $\frac{1}{100}$, il suffit que l'on ait

$$\varepsilon < \frac{2\sqrt{\frac{50}{g}}}{100} < \frac{1}{100}\sqrt{5}.$$

On satisfera *a fortiori* en prenant $\varepsilon < \frac{1}{25}$. Or, en nommant ε' l'erreur commise sur g, l'erreur ε est moindre que $\frac{50\varepsilon'}{g^2}$. Il suffira donc de poser

$$\frac{50\varepsilon'}{g^2} < \frac{1}{25},$$

$$\varepsilon' < \frac{g^2}{25 \times 50} < \frac{81}{25 \times 50} < \frac{81}{1250}.$$

On pourra donc prendre g avec deux décimales.

IV.

R désignant le rayon de la sphère évalué en millimètres, on trouve facilement

$$R = \sqrt[3]{\frac{45000000 \,.\, 3}{4 \,.\, 16 \,.\, 19 \,.\, \pi}},$$

et une marche analogue à celle qu'on a suivie dans la question précédente fait reconnaître qu'il suffit de prendre π avec trois décimales,

APPENDICE.

CHAPITRE XXII.

NOTIONS SUR LES SÉRIES.

Définitions.

281. Une *série* est une somme composée d'un nombre illimité de termes.

On dit qu'une série est *convergente* lorsqu'il existe une limite dont la somme de ses termes s'approche indéfiniment à mesure que l'on en considère un plus grand nombre.

Une série qui n'est pas convergente est dite *divergente*. Une série divergente ne représente rien et ne peut être d'aucun usage en analyse.

Exemple. Une progression par quotient est une série convergente, lorsque sa raison est moindre que l'unité. On a vu, en effet, qu'en supposant q moindre que l'unité, la somme

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \text{etc.},$$

s'approche indéfiniment de la limite $\frac{a}{1-q}$.

Une progression indéfinie dont la raison surpasse l'unité, est évidemment divergente.

282. Pour qu'une série soit convergente, il faut que ses termes approchent indéfiniment de la limite zéro. Mais cette

condition est loin d'être suffisante. Pour le prouver, nous allons faire voir que la série

$$[1] \qquad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots,$$

dont les termes diminuent indéfiniment, est cependant divergente. En effet, la somme

$$[2] \qquad \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots\frac{1}{2n}$$

est, quel que soit n, plus grande que $\frac{1}{2}$, car elle se compose de n termes, tous plus grands que $\frac{1}{2n}$; on peut donc, à partir d'un terme *quelconque*, prolonger assez la série [1] pour que sa somme augmente de $\frac{1}{2}$, et il est évident qu'en prenant un nombre suffisamment grand de groupes, tels que [2], on obtiendra autant de fois qu'on le voudra une somme plus grande que $\frac{1}{2}$, et le résultat pourra, dès lors, surpasser toute limite assignée.

283. Il n'est pas toujours facile de décider si une série est convergente ou divergente. Nous nous bornerons à indiquer une règle fort simple qui permet de prononcer dans un grand nombre de cas.

THÉORÈME I. *Une série à termes positifs est divergente, lorsque, à partir d'une certaine limite, le rapport d'un terme au précédent est plus grand que l'unité. Elle est convergente lorsque, à partir d'une certaine limite, ce rapport est constamment moindre qu'un nombre fixe plus petit que l'unité (il ne suffirait pas qu'il fût constamment moindre que l'unité).*

1° Si, à partir d'une certaine limite, le rapport d'un terme au précédent surpasse l'unité, il est évident que les termes vont en croissant, et que, par suite, leur somme augmente sans limite;

2° Considérons la série

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+u_{n+1}+\text{etc.}\ldots$$

Supposons qu'à partir du terme de rang n, le rapport d'un terme au précédent soit constamment moindre qu'un nombre K

inférieur à l'unité, en sorte que l'on ait

$$[1] \quad \begin{cases} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < K \\ \dfrac{u_{n+2}}{u_{n+1}} < K \\ \dfrac{u_{n+3}}{u_{n+2}} < K, \\ \vdots \end{cases}$$

on déduit des inégalités [1]

$$\begin{aligned} &u_{n+1} < Ku_n \\ &u_{n+2} < Ku_{n+1} < K^2u_n \\ &u_{n+3} < Ku_{n+2} < K^3u_n \\ &\vdots \\ &u_{n+p} < Ku_{n+p-1} < K^pu_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

en sorte que les termes de la série proposée, à partir du $n^{ième}$, sont moindres que ceux de la progression décroissante

$$u_n + Ku_n + K^2u_n + K^3u_n + \ldots,$$

et il est impossible, par conséquent, que leur somme croisse sans limite. Lors donc qu'on prendra un nombre de termes de plus en plus grand dans la série proposée, la somme, qui va sans cesse en augmentant, puisque les termes sont positifs, ne pourra cependant pas surpasser tout nombre donné. Il est dès lors évident qu'elle a une limite, précisément égale au plus petit des nombres qu'elle ne peut jamais surpasser.

284. Remarque. La démonstration précédente serait en défaut si l'on avait $k = 1$; dans ce cas, il y aurait doute, et la série pourrait être convergente ou divergente.

285. Remarque II. La démonstration précédente (283) fait connaître une limite de l'erreur commise quand on s'arrête dans la sommation d'une série à un terme d'un certain ordre. Soit en effet la série

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots.$$

Supposons qu'à partir du terme u_n, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ soit con-

Digitized by

stamment moindre que k, les termes u_{n+1}, u_{n+2}... seront (283) moindres que

$$u_nk, \quad u_nk^2, \quad u_nk^3 \ldots,$$

et, par suite, la somme des termes négligés en s'arrêtant à u_n sera plus petite que

$$ku_n + k^2u_n + \ldots;$$

c'est-à-dire que $\dfrac{ku_n}{1-k}$.

286. Théorème II. *Si les termes d'une série sont alternativement positifs et négatifs, et qu'ils décroissent indéfiniment, la série est convergente.*

Soit, en effet, la série

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 \ldots + u_n - u_{n+1} + u_{n+2} - \ldots,$$

nous pouvons l'écrire des deux manières suivantes:

$$u_0 - u_1 + u_2 \ldots + u_n - (u_{n+1} - u_{n+2}) - (u_{n+3} - u_{n+4}) - \text{, etc...}$$
$$u_0 - u_1 + u_2 \ldots + u_n - u_{n+1} + (u_{n+2} - u_{n+3}) + (u_{n+4} - u_{n+5}) + \ldots,$$

chaque terme étant, par hypothèse, plus petit que le précédent, les différences placées entre parenthèses sont toutes positives, et, par suite, la série prolongée aussi loin qu'on le voudra, est plus petite que la somme

$$u_0 - u_1 + u_2 \ldots + u_n,$$

et plus grande que

$$u_0 - u_1 + u_2 \ldots + u_n - u_{n+1},$$

et comme les deux sommes ne diffèrent que par le terme u_{n+1}, dont la limite est zéro, on voit que la série, prolongée indéfiniment, diffère aussi peu que l'on veut de chacune d'elles; on voit aussi qu'en s'arrêtant au terme positif u_n, on a une valeur trop grande, et que cette valeur devient trop petite si on la diminue de u_{n+1}. L'erreur commise en adoptant une de ces valeurs est donc moindre que u_{n+1}.

Digitized by Google

Définition du nombre e.

287. L'expression $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, lorsque m augmente indéfiniment, tend vers une limite dont la considération est fort utile en analyse, et que l'on désigne habituellement par la lettre e. Nous allons donner le moyen d'exprimer cette limite par une série convergente.

Supposons d'abord que m soit entier. On a alors,

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+m.\frac{1}{m}+\frac{m.m-1}{1.2}\frac{1}{m^2}+\ldots$$
$$+\frac{m.(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}\frac{1}{m^n}+\ldots,$$

ce que l'on peut écrire de la manière suivante :

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+1+\frac{\frac{m}{m}.\frac{m-1}{m}}{1.2}+\frac{\frac{m}{m}.\frac{m-1}{m}.\frac{m-2}{m}}{1.2.3}+\frac{\frac{m}{m}.\frac{m-1}{m}.\frac{m-2}{m}.\frac{m-3}{m}}{1.2.3.4}+$$
$$\ldots+\frac{\frac{m}{m}.\frac{m-1}{m}.\frac{m-2}{m}\ldots\frac{m-n+1}{m}}{1.2\ldots n}+\ldots.$$

mais on a évidemment

$$\frac{m}{m}.\frac{m-1}{m}.\frac{m-2}{m}\ldots\frac{m-(n-1)}{m}=1.\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right),$$

en sorte que

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+1+\frac{1-\frac{1}{m}}{1.2}+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.2.3}+\text{etc.}\ldots$$

si m croît indéfiniment, $\frac{1}{m}$, $\frac{2}{m}$, $\frac{3}{m}$,... tendent vers zéro, et l'on a, à la limite,

$$\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots\frac{1}{1.2\ldots n}+\ldots.$$

288. Remarque. On peut objecter au raisonnement précédent que les fractions $\frac{1}{m}$, $\frac{2}{m}$, $\frac{3}{m}$,..., ne tendant vers zéro lorsque m

augmente qu'à la condition d'avoir toujours un numérateur fini, on pourra toujours trouver, quelque grand que soit m, dans les termes avancés du développement, des facteurs, tels que $\left(1-\frac{n-1}{m}\right)$, qui différeront notablement de l'unité. Il faut, en effet, ajouter quelques développements pour que la démonstration précédente devienne complétement rigoureuse.

1° La série

$$[1] \qquad 1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots n}+\ldots.$$

est convergente (283), car le rapport du terme de rang n au précédent est égal à $\frac{1}{n-1}$, et tend vers zéro lorsque n augmente.

Il en résulte qu'à partir d'un terme suffisamment éloigné, la somme des termes de cette série devient aussi petite que l'on veut; en d'autres termes, on peut prendre n assez grand pour que

$$\frac{1}{1.2\ldots n}+\frac{1}{1.2\ldots n+1}+\ldots$$

ait une limite plus petite qu'un nombre assigné quelconque.

2° La suite

$$[2] \qquad 1+1+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)}{1.2}+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.2}+\ldots,$$

a les termes plus petits que les termes de même rang dans la suite [1]; on peut donc, *à fortiori*, assigner une valeur de n assez grande pour que la somme des termes de cette suite, à partir du $n^{ième}$, soit et reste plus petite que tout nombre assigné, quelque valeur que l'on attribue ultérieurement à m.

3° Cela posé, il est clair que si, dans l'expression [2], après avoir assigné à n une valeur fixe, mais très-grande, on fait augmenter m indéfiniment, les n premiers termes auront pour limite les n premiers termes de la suite [1], et la différence des deux séries aura pour limite zéro, puisque les n premiers termes s'approchant d'être les mêmes, la somme des suivants tend vers zéro dans l'une et l'autre série.

Il est donc prouvé que si l'on attribue à m des valeurs entières de plus en plus grandes, on a

$$e=\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots+\frac{1}{1.2\ldots n}+\ldots$$

289. Si, dans l'expression $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, on attribue à m des valeurs fractionnaires de plus en plus grandes, la limite sera toujours la même et égale à e. Pour le prouver, supposons que, n désignant un nombre entier très-grand, on ait

$$m=n+\alpha,$$

α étant moindre que l'unité, l'expression

$$\left(1=\frac{1}{m}\right)^m$$

sera évidemment comprise entre

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

et

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n;$$

car, pour obtenir la première de ces expressions, il faut, dans $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, remplacer le terme $\frac{1}{m}$ et l'exposant m respectivement par les nombres plus grands $\frac{1}{n}$ et $n+1$; pour obtenir la seconde, il a fallu remplacer les mêmes quantités par les nombres plus petits $\frac{1}{n+1}$ et n. Or on a

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}.$$

Or, n étant entier et très-grand, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ et $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

diffèrent très-peu de e, $1+\frac{1}{n}$, $1+\frac{1}{n+1}$ diffèrent très-peu de l'unité, et les deux expressions précédentes ont l'une et l'autre e pour limite ; il en est par conséquent de même de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, qui est compris entre elles.

RÉSUMÉ.

281. Ce qu'on appelle série, convergence et divergence. Une progression par quotient est convergente quand la raison est plus petite que l'unité, divergente dans le cas contraire. — 282. Les termes d'une série peuvent décroître indéfiniment sans que la série soit convergente.—On le prouve par un exemple. — 283. Une série dont tous les termes sont plus petits que l'unité est convergente, lorsque le rapport d'un terme au précédent est, à partir d'une certaine limite, constamment plus petit qu'un nombre moindre que un.—La série est divergente quand le rapport est plus grand que l'unité.—284. Il y a doute, s'il a pour limite l'unité. — 285. Limite de l'erreur commise en s'arrêtant à un terme donné. — 286. Lorsque les termes d'une série décroissent indéfiniment, et sont alternativement positifs et négatifs, la série est convergente.—287. Limite vers laquelle tend $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, lorsque m croît indéfiniment.— 288. Détails nécessaires pour compléter la démonstration précédente. — 289. La limite est la même, lorsque m est fractionnaire que lorsqu'il est entier.

EXERCICES.

I. Trouver la limite de $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ lorsque n augmente indéfiniment.

II. Trouver la limite de $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ lorsque m augmente indéfiniment.

III. Prouver que e est incommensurable.

IV. $$1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\ldots+\frac{1}{n^m}+\ldots$$

est une série convergente lorsque m est plus grand que 1, divergente dans le cas contraire.

V. Si l'on considère m numéros, et qu'on les range de toutes les manières possibles, en désignant par P_0^m le nombre des permutations dans lesquelles aucun d'eux n'est à son rang, c'est-à-dire dans lesquelles le numéro 1 n'est pas au premier rang, ni le numéro 2 au second, etc., la fraction $\frac{P_0^m}{1.2\ldots m}$ converge rapidement vers $\frac{1}{e}$ lorsque m augmente.

VI. Une série à termes positifs

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

est convergente si $\sqrt[n]{u_n}$ a une limite moindre que l'unité.

VII. Appliquer la règle précédente pour prouver la convergence de la série

$$1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots m} + \ldots.$$

VIII. Si la série

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

est convergente; quels que soient les signes de ses termes, il en sera de même de la série

$$E_0 u_0 + E_1 u_1 + E_2 u_2 + \ldots + E_n u_n + \ldots,$$

$E_0, E_1, E_2, \ldots, E_n \ldots$ étant des nombres positifs décroissants.

IX. $$A_1 + \frac{A_3}{1.2.3} + \ldots + \frac{A_{2n+1}}{1.2\ldots 2n+1},$$

dans laquelle A_n est un nombre entier quelconque inférieur à n, est une série convergente. Sa limite est un nombre incommensurable. (On suppose $A_1 < 1$, $A_3 < 3$, ..., $A_{2n+1} < 2n + 1$).

Digitized by Google

CHAPITRE XXIII.

THÉORIE DES FONCTIONS DÉRIVÉES.

Dérivée d'un polynome.

290. En désignant par m un nombre entier quelconque, on a identiquement

$$(x+h)^m = x^m + mx^{m-1}h + \frac{m.m-1}{1.2}x^{m-2}h^2 + \ldots + \frac{m.m-1\ldots m-n+1}{1.2.3\ldots n}h^n x^{m-n}\ldots + h^m.$$

Cette formule permet de développer et d'ordonner, suivant les puissances de h, le résultat de la substitution de $x+h$ à x dans un polynome de la forme

$$F(x) = Ax^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_{m-1}x + A_m.$$

On aura, en effet, par cette substitution,

$$F(x+h) = A(x+h)^m + A_1(x+h)^{m-1} + A_2(x+h)^{m-2} + \ldots A_{m-1}(x+h) + A_m.$$

En développant et réunissant les termes de même degré en h,

$$\begin{aligned}
F(x+h) &= Ax^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_{m-1}x + A_m \\
&+ h\,[mAx^{m-1} + (m-1)A_1x^{m-2} + (m-2)A_2x^{m-3} + \ldots + A_{m-1}] \\
&+ \frac{h^2}{1.2}.[m.(m-1)Ax^{m-2} + (m-1)(m-2)A_1x^{m-3} + \ldots] \\
&+ \frac{h^3}{1.2.3}[m.(m-1)(m-2)Ax^{m-3} + (m-1)(m-2)(m-3)A_1x^{m-4} + \ldots] \\
&\vdots \\
&+ \frac{h^m}{1.2\ldots m}[m.(m-1)\ldots 1]A.
\end{aligned}$$

On voit que le terme indépendant de h est le polynome proposé lui-même $F(x)$; quant aux coefficients placés entre parenthèses, ils sont faciles à déduire du premier dont on les nomme

les *dérivées successives*. Le coefficient de h est la première dérivée; celui de $\frac{h^2}{2}$ la seconde dérivée; celui de $\frac{h^3}{1.2.3}$ la troisième dérivée, et ainsi de suite. Si l'on représente, comme c'est l'usage, ces dérivées successives de $F(x)$, par $F'(x)$, $F''(x)$, $F'''(x)$, etc., on a ainsi, *par définition*,

$$F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{1.2}F''(x) + \ldots + \frac{h^m}{1.2\ldots m}F^m(x).$$

$F(x)$ désignant un polynome entier de degré m.

291. Il est essentiel d'examiner comment la dérivée $F'(x)$ peut se déduire de $F(x)$ et d'acquérir l'habitude de l'écrire immédiatement lorsque $F(x)$ est donné. On a vu qu'en posant

$$F(x) = Ax^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_{m-1}x + A_m,$$

la dérivée $F'(x)$ est

$$F'(x) = mAx^{m-1} + (m-1)A_1x^{m-2} + (m-2)A_2x^{m-3} + \ldots + A_{m-1},$$

A la seule inspection de ces formules on peut énoncer la règle suivante:

Pour former la dérivée d'un polynome par *rapport* à une lettre ordonnatrice x, il faut multiplier chaque terme par l'exposant de cette lettre et diminuer ensuite l'exposant d'une unité. Ainsi le terme Ax^m fournit, dans la dérivée, le terme mAx^{m-1}.

Les termes qui, dans le polynome proposé, ne contiennent pas la lettre ordonnatrice ne fournissent dans la dérivée aucun terme correspondant; cela est d'ailleurs évidemment conforme à la règle générale, car ces termes peuvent être considérés comme multipliés par x^0, et dès lors en formant leur dérivées d'après cette règle, on doit les multiplier par 0, ce qui les annule.

292. Si l'on examine les dérivées successives

$$F'(x) = mAx^{m-1} + (m-1)A_1x^{m-2} + \ldots;$$
$$F''(x) = m.(m-1)Ax^{m-2} + (m-1)(m-2)A_1x^{m-3} + \ldots;$$
$$F'''(x) = m.(m-1)(m-2)Ax^{m-3} + (m-1)(m-2)(m-3)A_1x^{m-4} + \ldots;$$
$$\vdots$$
$$F^m(x) = [m.(m-1)\ldots 1]A.$$

On reconnait que chacune d'elles peut se former de la précé-

dente, d'après la loi qui donne $F'(x)$ au moyen de $F(x)$, en sorte que $F''(x)$ est la dérivée de $F'(x)$, $F'''(x)$ la dérivée de $F''(x)$, et ainsi de suite.

On voit aussi que le degré de ces dérivées successives va sans cesse en diminuant et que la dernière est indépendante de x, ce sont là des faits qui résultent de la seule inspection des formules, nous nous bornons à les constater.

293. La règle à l'aide de laquelle on forme la dérivée d'un polynome permet de trouver, tout aussi facilement, un polynome dont la dérivée est donnée.

Soit, en effet, le polynome

$$F(x) = Ax^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_px^{m-p} + \ldots + A_{m-1}x + A_m;$$

il est clair qu'en augmentant d'une unité l'exposant de x dans chaque terme, et en divisant le terme ainsi modifié par l'exposant de la variable, on formera un polynome

$$\frac{Ax^{m+1}}{m+1} + \frac{A_1x^m}{m} + \ldots + \frac{A_px^{m-p+1}}{m-p+1} + \frac{A_{m-1}x^2}{2} + A_mx,$$

qui a pour dérivée $F(x)$. On peut, en outre, ajouter à ce polynome un terme indépendant de la variable qui (**291**) ne changera pas sa dérivée.

Nouvelle définition de la dérivée.

294. La définition que nous avons donnée de la dérivée ne s'applique qu'aux polynomes entiers et rationnels, mais nous allons en déduire une propriété importante que nous prendrons ensuite pour définition, ce qui permettra d'étendre la notion de dérivée aux expressions d'une autre forme.

On a (**290**), en désignant par $F(x)$ un polynome entier par rapport à x,

$$F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{1.2}F''(x) + \ldots,$$

on en conclut

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x) + \frac{h}{1.2}F''(x) + \frac{h^2}{1.2.3}F'''(x) + \ldots$$

Si, x restant fini, on fait tendre h vers zéro, le second membre

Digitized by

a évidemment pour limite $F'(x)$, il doit, par suite, en être de même du premier, et l'on a, par conséquent,

$$F'(x) = \lim \frac{F(x+h) - F(x)}{h},$$

résultat que l'on peut énoncer ainsi :

La dérivée d'un polynome F(x) *est la limite du rapport de l'accroissement* F(x + h) — F(x) *de ce polynome à l'accroissement* h *de la variable, lorsque cet accroissement diminue de plus en plus.*

295. La propriété précédente sera dorénavant prise par nous comme définition; on voit qu'elle permet d'étendre la notion de dérivées à une expression renfermant une variable x d'une manière quelconque, c'est-à-dire à une fonction quelconque de x. Car on désigne sous la dénomination générale de fonction toute quantité qui acquiert une valeur déterminée pour chaque valeur attribuée à la variable.

296. La dérivée seconde d'une fonction est la dérivée de la dérivée, la dérivée troisième est la dérivée de la seconde dérivée, et ainsi de suite. Ces propriétés démontrées quand il s'agit d'un polynome (**292**) sont prises pour définition dans le cas d'une fonction quelconque.

Dérivée de sin x.

297. La dérivée de $\sin x$ est, par définition, la limite de l'expression

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h},$$

lorsque h tend vers zéro. Or, on a

$$\sin(x+h) - \sin x = 2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2};$$

donc

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = 2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{h} = \cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\left(\frac{h}{2}\right)}.$$

Or, $\dfrac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)}$ a pour limite l'unité lorsque h tend vers zéro

$\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$ a évidemment pour limite $\cos x$, et par suite la dérivée de $\sin x$ est égale à $\cos x$.

Dérivée de $\cos x$.

298. La dérivée de $\cos x$ est, par définition, la limite de l'expression

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h},$$

lorsque h tend vers zéro. Or, on a

$$\cos(x+h)-\cos x = -2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2},$$

donc

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = -2\frac{\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h} = -\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}.$$

$\dfrac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ ayant pour limite l'unité, le second membre a évidemment pour limite $-\sin x$, et, par conséquent, la dérivée de $\cos x$ est $-\sin x$.

Dérivée de a^x.

299. La dérivée de a^x est, par définition, la limite de l'expression

$$[1] \qquad \frac{a^{(x+h)}-a^x}{h},$$

lorsque h tend vers 0.

Or, on a évidemment

$$a^{x+h}-a^x = a^x(a^h-1);$$

il faut donc chercher la limite de

$$[2] \qquad a^x\frac{a^h-1}{h}.$$

Posons

$$[3] \qquad a^h - 1 = \alpha.$$

h étant très-petit, a^h diffère peu de l'unité et, par suite, α est une quantité qui tend vers 0. On déduit de [3]

$$a^h = 1 + \alpha,$$
$$h \log a = \log(1+\alpha),$$
$$h = \frac{\log(1+\alpha)}{\log a}.$$

L'expression [2] devient d'après cela

$$a^x \frac{\alpha}{\frac{\log(1+\alpha)}{\log a}} = \frac{a^x \alpha \log a}{\log(1+\alpha)} = \frac{a^x \log a}{\frac{1}{\alpha}\log(1+\alpha)},$$

le numérateur ne contenant pas α, il suffit de chercher la limite du dénominateur. Or, on a

$$\frac{1}{\alpha}\log(1+\alpha) = \log(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}},$$

et, en posant $\qquad \alpha = \frac{1}{n},$

$$\log(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

α tendant vers 0, n augmente indéfiniment, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tend donc (289) vers e, et, par suite, $\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ a pour limite $\log e$, et l'expression $\frac{a^x \log a}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$ tend, par conséquent, vers $\frac{a^x \log a}{\log e}$: telle est donc la dérivée de a^x.

Dérivée de $\log x$.

300. La dérivée de $\log x$ est, par définition, la limite de l'expression

$$[1] \qquad \frac{\log(x+h) - \log x}{h},$$

lorsque h tend vers 0.

Digitized by Google

Or, on a

$$\log(x+h) - \log x = \log\left(\frac{x+h}{x}\right) = \log\left(1+\frac{h}{x}\right).$$

L'expression [1] équivaut donc à

$$[2] \qquad \frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}.$$

Posons $\frac{h}{x} = \alpha$. α tendra vers 0 avec h, il viendra $h = \alpha x$, et l'expression [2] devient

$$\frac{\log(1+\alpha)}{\alpha x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\alpha}\log(1+\alpha) = \frac{1}{x}\log(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Or, on a vu (**299**) que, α tendant vers 0, $\log(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ a pour limite $\log e$. La limite de $\frac{1}{x}\log(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ est donc $\frac{\log e}{x}$, qui représente par conséquent la dérivée de $\log x$.

Dérivée d'une somme.

301. La dérivée d'une somme de plusieurs expressions est la somme des dérivées de chacune d'elles. Désignons, en effet, par $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, des fonctions quelconques de x. Si l'on change x en $x+h$, ces fonctions deviendront respectivement $f_1(x+h)$, $f_2(x+h)$, $f_3(x+h)$, et l'accroissement de la somme, égal évidemment à la somme des accroissements des parties, sera :

$$f_1(x+h) - f_1(x) + f_2(x+h) - f_2(x) + f_3(x+h) - f_3(x).$$

Si l'on divise cet accroissement par h, on aura :

$$\frac{f_1(x+h)-f_1(x)}{h} + \frac{f_2(x+h)-f_2(x)}{h} + \frac{f_3(x+h)-f_3(x)}{h},$$

lorsque h tend vers zéro, les trois termes qui composent cette somme ont, par définition, pour limites, les dérivées de $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, et, par suite, la somme de ces dérivées est la dérivée de l'expression proposée.

Dérivée d'un produit.

302. Représentons par u et v deux fonctions quelconques de x, et par a_u, a_v les accroissements de ces fonctions lorsque x devient $x+h$. Cherchons la dérivée du produit uv. Si l'on change x en $x+h$, u et v deviennent, d'après notre notation, $u+a_u$ et $v+a_v$. uv devient

$$[1] \qquad (u+a_u)(v+a_v)=uv+ua_v+va_u+a_ua_v.$$

Son accroissement est, par conséquent,

$$[2] \qquad ua_v+va_u+a_ua_v.$$

Si l'on divise cet accroissement par h, le quotient est

$$[3] \qquad u\frac{a_v}{h}+v\frac{a_u}{h}+\frac{a_u}{h}\cdot a_v.$$

Lorsque h tend vers 0, $\frac{a_v}{h}$ et $\frac{a_u}{h}$, rapports de l'accroissement de v et de celui de u à l'accroissement h de la variable, ont pour limites les dérivées de v et de u, que nous désignerons par u' et v'. Les deux premiers termes de l'expression précédente ont donc pour limites uv' et vu'. Quant au troisième terme, il a pour limite 0, car $\frac{a_u}{h}$ a pour limite u', et a_v a pour limite 0. La limite de l'expression [3], et, par suite, la dérivée de uv est donc :

$$uv'+vu',$$

c'est-à-dire la somme des produits obtenus en multipliant chaque facteur par la dérivée de l'autre.

303. Remarque. Si l'un des facteurs est constant, sa dérivée est nulle, et la dérivée du produit se réduit au produit de ce facteur constant par la dérivée de l'autre.

304. Si nous considérons un produit d'un nombre quelconque de facteurs

$$u_1u_2u_3 \ldots u_n,$$

je dis que la dérivée sera la somme des produits obtenus en

multipliant la dérivée de chaque facteur par le produit de tous les autres facteurs. Admettons, en effet, que cette règle soit démontrée pour un produit de $(n-1)$ facteurs, nous allons prouver qu'elle est vraie, par cela même, pour un produit de n facteurs. On a, en effet,

$$[1] \qquad u_1u_2 \ldots u_n = (u_1u_2 \ldots u_{n-1})u_n.$$

En considérant le second membre comme un produit de deux facteurs, et en indiquant la dérivée d'une expression par un accent placé au-dessus, la dérivée de ce produit est (302)

$$[2] \qquad (u_1u_2 \ldots u_{n-1})'u_n + u_1u_2 \ldots u_{n-1}u_n'.$$

Mais, d'après la règle admise pour la dérivée des produits de $n-1$ facteurs, on a :

$$[3] \quad (u_1u_2 \ldots u_{n-1})' = u_1'u_2 \ldots u_{n-1} + u_1u'_2 \ldots u_{n-1} + u_1u_2u_3' \ldots u_{n-1} + \ldots + u_1u_2 \ldots u'_{n-1},$$

ce qui met l'expression [2] sous la forme :

$$u_1'u_2 \ldots u_{n-1}u_n + u_1u_2' \ldots u_{n-1}u_n + \ldots + u_1u_2 \ldots u_{n-1}'u_n + u_1u_2 \ldots u_{n-1}u_n',$$

résultat conforme à la règle annoncée.

Cette règle est donc applicable à un produit de n facteurs, pourvu qu'elle le soit à un produit de $(n-1)$ facteurs. Or elle a été établie dans le cas de deux facteurs; elle est donc vraie quand il y en a trois, par suite quand il y en a quatre, puis cinq, puis enfin un nombre quelconque.

Dérivée d'une puissance.

305. Pour obtenir la dérivée d'une puissance entière u^m, u désignant une fonction de x, nous considérerons cette puissance comme un produit :

$$u \times u \times u \ldots \times u.$$

En appliquant alors la règle précédente, et désignant par u' la dérivée de u, nous verrons que la dérivée de u^m est égale à

$$u' \times u \times u \times \ldots u + u \times u' \times u \times u + \ldots,$$

c'est-à-dire à $\qquad mu'u^{m-1}$.

Ainsi, pour prendre la dérivée d'une puissance u^m, il faut

Digitized by Google

multiplier la dérivée mu^{m-1}, prise comme si u était la variable, par la dérivée u' de u par rapport à x.

Dérivée d'un quotient.

306. Soient u et v deux fonctions de x, dont nous désignerons les dérivées par u' et v'. Posons

$$y=\frac{u}{v},$$

et, par suite, $$yv=u.$$

Désignons par y' la dérivée de y.

u étant égal à yv, u' est égal à la dérivée du produit yv. Et comme cette dérivée (**302**) est $yv'+y'v$, on a

$$u'=yv'+y'v;$$

on en déduit $$y'=\frac{u'-yv'}{v},$$

et en remplaçant y par $\frac{u}{v}$,

$$y'=\frac{u'-\frac{uv'}{v}}{v}=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Telle est, par conséquent, la dérivée du quotient $\frac{u}{v}$.

Dérivée de $F(a+x)$.

307. Si l'on sait trouver la dérivée de $F(x)$, il est très-facile de trouver celle du résultat obtenu, lorsque l'on change, dans cette fonction x, en $a+x$, a désignant une constante. La dérivée de $F(a+x)$ est en effet, par définition, la limite de l'expression

$$\frac{F(a+x+h)-F(a+x)}{h},$$

ce que l'on peut écrire, en posant $a+x=u$:

$$\frac{F(u+h)-F(u)}{h}.$$

Or cette dernière expression a évidemment pour limite $F'(u)$.

Pour avoir la dérivée de $F(a+x)$, il faut donc prendre la dérivée de la fonction $F(x)$ et y remplacer x par $a+x$.

EXEMPLE. La dérivée de $\log x$ étant (300) $\frac{\log e}{x}$, la dérivée de $\log(1+x)$ est, d'après la règle précédente, $\frac{\log e}{1+x}$. On en conclut (305) que $\frac{1}{1+x}$ est la dérivée de $\frac{\log(1+x)}{\log e}$.

Dérivée de $F(a-x)$.

308. La dérivée de $F(a-x)$ est, par définition,

$$\frac{F(a-x-h)-F(a-x)}{h},$$

ou, en posant $a-x-h=u$,

$$\frac{F(u)-F(u+h)}{h},$$

dont la limite est évidemment $-F'(u)$. Et comme u a pour limite $a-x$, la dérivée de $F(a-x)$ est, par conséquent, $-F'(a-x)$.

EXEMPLE. La dérivée de $\log x$ étant (300) $\frac{\log e}{x}$, la dérivée de $\log(1-x)$ est, d'après la règle précédente, $-\frac{\log e}{1-x}$. On en conclut (305) que $\frac{1}{1-x}$ est la dérivée de $-\frac{\log(1-x)}{\log e}$.

APPLICATIONS DES RÈGLES PRÉCÉDENTES.

Dérivée de $\tan x$.

309. On a
$$\text{tang } x=\frac{\sin x}{\cos x}.$$

Pour obtenir la dérivée de tang x, il faut donc supposer, dans la formule qui donne (306) la dérivée d'un quotient

$$u=\sin x,\quad v=\cos x,\quad y=\text{tang } x.$$

On sait qu'alors (297), (298)

$$u'=\cos x,\quad v'=-\sin x,$$

Digitized by Google

et il viendra :

$$y' = \text{dérivée de tang } x = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Dérivée de $\cot x$.

310. On a $$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Pour obtenir la dérivée de $\cot x$, il faut donc supposer (**306**)

$$u = \cos x, \; v = \sin x, \; y = \cot x.$$

On sait qu'alors (**297**), (**298**)

$$u' = -\sin x, \quad v' = \cos x,$$

et il viendra :

$$y' = \text{dérivée de cot } x = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}.$$

Dérivée de $u^{\frac{m}{n}}$.

311. Désignons par u une fonction quelconque de x. Cherchons la dérivée de $u^{\frac{m}{n}}$, m et n désignant des nombres entiers quelconques. Posons

[1] $$y = u^{\frac{m}{n}},$$

et représentons par y' la dérivée cherchée. On déduit de [1]

$$y^n = u^m.$$

En prenant les dérivées des deux membres (**305**) et les égalant, il vient :

$$ny^{n-1}y' = mu^{m-1}u',$$

$$y' = \frac{m}{n}\frac{u^{m-1}}{y^{n-1}}u',$$

et, en remplaçant y par sa valeur $u^{\frac{m}{n}}$,

$$y' = \frac{m}{n}u^{\left(\frac{m}{n}-1\right)}u'.$$

On voit que la dérivée de $u^{\frac{m}{n}}$ est exprimée par la même formule que dans le cas où l'exposant est entier.

Dérivée de u^{-m}.

312. Cherchons enfin la dérivée de u^{-m}, m désignant un nombre positif entier ou fractionnaire, et u une fonction dont nous supposerons la dérivée connue et représentée par u'. Posons

$$y = u^{-m} = \frac{1}{u^m};$$

on en déduit
$$yu^m = 1.$$

Le produit yu^m étant constant, sa dérivée doit être nulle; on en conclut (**302**), (**305**) :

$$y'u^m + mu^{m-1}u'y = 0,$$

d'où
$$y' = -m\frac{u'y}{u} = -mu'u^{-m-1}.$$

REMARQUE. D'après les résultats obtenus (**305**) (**311**) (**312**) u désignant une fonction dont la dérivée est u', la dérivée de u^m est $mu^{m-1}u'$, quelle que soit la valeur entière ou fractionnaire, positive ou négative de m.

Condition pour qu'une dérivée soit constamment nulle.

313. La dérivée d'une constante est évidemment égale à zéro. Il est important de démontrer la réciproque. *Toute fonction dont la dérivée est constamment nulle, se réduit à une constante.*

Soit $\mathrm{F}(x)$ une fonction dont la dérivée soit nulle. Considérons les fractions suivantes

$$[1] \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)}{h} = \varepsilon_1, \\ &\frac{\mathrm{F}(x+2h)-\mathrm{F}(x+h)}{h} = \varepsilon_2, \\ &\frac{\mathrm{F}(x+3h)-\mathrm{F}(x+2h)}{h} = \varepsilon_3, \\ &\vdots \\ &\frac{\mathrm{F}(x+nh)-\mathrm{F}[x+(n-1)h]}{h} = \varepsilon_n. \end{aligned} \right.$$

Supposons que h tendant vers zéro, n augmente de telle manière que le produit nh conserve une valeur constante k. Les seconds membres ε_1, ε_2, ... ε_n tendront tous vers zéro, car, par hypothèse le rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable a toujours zéro pour limite : en chassant les dénominateurs des équations [1], et ajoutant ensuite ces équations, il vient

$$F(x+nh)-F(x)=F(x+k)-F(x)=h(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots\varepsilon_n),$$

et, en nommant η le plus grand des nombres ε_1, ε_2, ... ε_n,

$$F(x+k)-F(x)<n\eta h<\eta k.$$

Or, les quantités ε_1, ε_2,... ε_n tendant toutes vers zéro, la plus grande d'entre elles η peut devenir aussi petite que l'on veut, et, par suite, la différence, *fixe*, $F(x+k)-F(x)$, ne peut différer de zéro. Deux valeurs quelconques de $F(x)$ sont donc égales entre elles, et la fonction est constante.

314. Remarque I. Si deux fonctions ont les mêmes dérivées, leur différence a pour dérivée zéro ; elle est par conséquent constante.

315. Remarque II. Si la dérivée d'une fonction est constamment très-petite, la fonction diffère très-peu d'une constante.

En répétant, en effet, mot pour mot, ce qui a été dit (**313**), nous serons conduits de la même manière à l'inégalité

$$[1] \qquad F(x+k)-F(x)<\eta k$$

k désignant encore un nombre quelconque et η la plus grande des fractions ε_1, ε_2, ε_3. Or, toutes ces fractions ayant, par hypothèse, des limites très-petites, si h tend vers zéro, la plus grande d'entre elles η doit aussi avoir une limite très-petite, et l'inégalité précédente prouve, par suite, que

$$F(x+k)-F(x)$$

a une valeur très-petite. Deux valeurs quelconques de la fonction $F(x)$ diffèrent donc très-peu l'une de l'autre, et la fonction diffère par conséquent très-peu d'une constante. Si la dérivée reste constamment moindre qu'un nombre donné α, η finira par être moindre que α, et l'on aura par conséquent

$$F(x+k)-F(x)<k\alpha.$$

Digitized by Google

RÉSUMÉ.

290. Développement de F $(x+h)$ suivant les puissances de h, F(x) désignant un polynome entier. Définition des dérivées des différents ordres. — **291**. Règle pour former la dérivée d'un polynome. — **292**. La seconde dérivée est la dérivée de la première, et ainsi de suite. — **293**. Formation d'un polynome dont la dérivée est donnée. — **294**. La dérivée d'un polynome est la limite du rapport de son accroissement à l'accroissement de la variable. — **295**. Cette propriété est prise comme définition de la dérivée d'une fonction quelconque. — **296**. Définition des dérivées successives d'une fonction quelconque. — **297**. Dérivée de sin x. — **298**. Dérivée de cos x. — **299**. Dérivée de a^x. — **300**. Dérivée de log x. — **301**. Dérivée d'une somme. — **302**. Dérivée d'un produit. — **303**. Cas où l'un des facteurs est constant. — **304**. Dérivée du produit d'un nombre quelconque de facteurs. — **305**. Dérivée d'une puissance entière. — **306**. Dérivée d'un quotient. — **307**. Dérivée de F $(a+x)$. — **308**. Dérivée de F $(a-x)$. — **309**. — **310**. Dérivée de tang x et de cot x. — **311**. Dérivée d'une puissance fractionnaire. — **312**. Dérivée d'une puissance négative. — **313**. Si une dérivée est nulle, la fonction est constante. — **314**. Si deux fonctions ont même dérivée, leur différence est constante. — **315**. Si la dérivée est toujours très-petite, la fonction diffère très-peu d'une constante.

EXERCICES.

I. Limite de
$$\frac{a^{x+2h}-2a^{x+h}+a^x}{h^2},$$
lorsque h tend vers zéro.

II. Trouver la limite de
$$\frac{\sin(x+3h)-3\sin(x+2h)+3\sin(x+h)-\sin x}{h^3},$$
lorsque h tend vers zéro.

III. Chercher la limite de l'expression
$$\frac{(x+1)^m-1}{m},$$
lorsque m tend vers zéro.

CHAPITRE XXIV.

SÉRIES QUI SERVENT AU CALCUL LOGARITHMIQUE.

Développement de log $(1-x)$.

316. On a, comme on sait, identiquement :

$$1+x+x^2+\dots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}=\frac{1}{1-x}-\frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Si n augmente indéfiniment, et que x soit moindre que l'unité, le second membre a pour limite $\frac{1}{1-x}$, qui par conséquent est la limite de la série

$$[1] \qquad 1+x+x^2+\dots+x^n\dots+\dots,$$

prolongée indéfiniment.

Or $\frac{1}{1-x}$ est (308) la dérivée de $-\frac{\log(1-x)}{\log e}$; $1+x+x^2+\dots+x^n$ est évidemment celle de

$$[2] \qquad x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots+\frac{x^n}{n}+\dots$$

La série [2] et l'expression $-\frac{\log(1-x)}{\log e}$ ayant même dérivée ne peuvent (314) différer que par une constante, on a donc, en désignant par C un nombre indépendant de x,

$$-\frac{\log(1-x)}{\log e}=C+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots+\frac{x^n}{n}+\dots,$$

et, par suite,

$$\log(1-x)=-\log e\left(C+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots+\frac{x^n}{n}+\dots\right).$$

Le premier membre s'annulant pour $x=0$, il doit en être de même du second; on doit donc avoir $C=0$, et, par suite,

$$-\log(1-x)=\log e\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots\right).$$

Si l'on suppose que l'on prenne e pour base du système de logarithmes, on a $\log e=1$, et la formule précédente devient

$$\log(1-x)=-\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots\right);$$

le signe log désignant ici le logarithme pris dans la base e, c'est-à-dire le logarithme que l'on nomme népérien.

317. Remarque. La formule précédente suppose essentiellement que x soit plus petit que l'unité. S'il en était autrement, la série qui forme le second membre serait divergente et n'aurait aucun sens. On doit ajouter que, même dans ce cas, la démonstration que nous avons donnée n'est pas complétement rigoureuse; il n'est pas évident, en effet, comme nous l'avons admis, qu'une série dont les termes ont respectivement pour dérivées les termes d'une série convergente soit par cela même convergente, et que la dérivée de sa limite soit précisément la limite de l'autre série. Ce principe est cependant exact, et nous allons le démontrer.

Soit $$a+bx+cx^2+dx^3+\ldots+kx^n+\ldots$$

une série convergente ordonnée suivant les puissances de x. Désignons par $\varphi(x)$ sa limite, en sorte que

$$\varphi(x)=a+bx+cx^2+\ldots+kx^n+R,$$

R étant une fonction de x qui tend vers zéro, quand n augmente et qui, par conséquent, lorsque n est très-grand, a, quel que soit x, une valeur très-petite. Nommons $F(x)$ et R_1 deux fonctions qui aient respectivement pour dérivées $\varphi(x)$ et R, on aura (314)

$$F(x)=ax+\frac{bx^2}{2}+\frac{cx^3}{3}+\ldots+\frac{kx^{n+1}}{n+1}+R_1+C;$$

pour prouver que $F(x)$ ne diffère que par une constante de la limite de la série

$$ax+\frac{bx^2}{2}+\frac{cx^3}{3}+\ldots+\frac{kx^{n+1}}{n+1},$$

il suffit évidemment de prouver que R_1 peut, lorsque n augmente, différer aussi peu que l'on voudra d'une constante, or cela résulte précisément de ce qui a été dit (315) puisque sa dérivée R est constamment très-petite.

Développement de $\log(1+x)$.

318. On a identiquement :

$$1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + x^{2n+1} = \frac{1 - x^{2n+2}}{1+x} = \frac{1}{1+x} - \frac{x^{2n+2}}{1+x}.$$

Si l'on suppose que n augmente indéfiniment, x étant moindre que l'unité, le second membre a pour limite $\frac{1}{1+x}$, qui est par conséquent la limite de la série

$$[1] \qquad 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + x^{2n+1} + \ldots$$

$\frac{1}{1+x}$ est (307) la dérivée de $\frac{\log(1+x)}{\log e}$;

$$1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + x^{2n+1} + \ldots$$

est évidemment la dérivée de

$$[2] \qquad x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{x^{n+2}}{2n+2} + \ldots$$

La série [2] et l'expression $\frac{\log(1+x)}{\log e}$, ayant même dérivée, ne peuvent différer que par une constante, et l'on a par conséquent :

$$\frac{\log(1+x)}{\log e} = c + \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^{2n+2}}{2n+2} + \ldots\right),$$

et, par suite,

$$\log(1+x) = c \log e + \log e\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots\right).$$

Le premier membre s'annulant pour $x=0$, il doit en être de même du second ; l'on a par conséquent $C=0$, ce qui réduit la formule précédente à

$$\log(1+x) = \log e\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots\right).$$

Digitized by Google

Si l'on suppose que e soit la base du système de logarithmes, log e est l'unité, et l'on a

$$\log(1+x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots\right),$$

le signe log désignant ici le logarithme népérien.

319. En retranchant l'un de l'autre les développements de $\log(1+x)$ et de $\log(1-x)$, il vient

$$[1]\quad \log(1+x) - \log(1-x) = 2\log e\left(x + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\ldots\right),$$

ce que l'on peut écrire

$$[2]\quad \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\log e\left(x + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots\right)$$

Posons maintenant

$$\frac{1+x}{1-x} = 1 + \frac{z}{n},$$

d'où

$$x = \frac{z}{2n+z};$$

puis observons que

$$\log\left(1 + \frac{z}{n}\right) = \log(n+z) - \log z.$$

il viendra

$$[3]\quad \log(n+z) - \log n = 2\log e\left[\frac{z}{2n+z} + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^5\right]\ldots$$

Si l'on fait $z = 1$, il vient

$$[4]\quad \log(n+1) = \log n + 2\log e\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^3 + \ldots\right],$$

série très-convergente qui permettra de calculer $\log(n+1)$ connaissant $\log n$. Or on connaît $\log 1 = 0$; on pourra donc trouver successivement log 2, log 3, etc.

320. La formule [4] suppose que l'on connaisse log e. Or, si l'on prenait e pour base du système de logarithmes, on aurait

$$\log e = 1.$$

Le logarithme de e dans la base 10 est donc le produit de cette

valeur 1, par le module du premier système par rapport au second. Pour obtenir ce module, cherchons le logarithme du nombre 10 dans les deux systèmes. Or on a,

dans la base 10, $\log 10 = 1$;

dans la base e, $\log 10 = 2\log 5 = 2\log(4+1)$.

On déterminera log 2 en faisant $n=1$ dans la formule [4].

On aura ensuite $\log 4 = 2\log 2$;

puis, en se servant encore de la formule [4], on calculera log 5 d'après la valeur connue de log 4. Dans tous ces calculs, il faudra supposer $\log e = 1$, puisque nous prenons e pour base.

Connaissant le logarithme 10 dans les deux systèmes, le rapport de ses deux valeurs fera connaître le module.

RÉSUMÉ.

316. Développement de $\log(1-x)$. La démonstration repose sur ce que la dérivée de $\log(1-x)$ étant $-\frac{\log e}{1-x}$, $\log(1-x)$ doit être égal à la série qui a pour dérivées de ces termes les différents termes du développement de $-\frac{\log e}{1-x}$. — **317**. Pour compléter la démonstration précédente, on prouve que, si les termes d'une série ont pour dérivées les termes d'une série convergente, la première série est également convergente, et sa somme a pour dérivée la somme de la première. — **318**. Développement de $\log(1+x)$. — **319**. Développement de la différence de deux logarithmes. — **320**. Détermination du logarithme de e dans la base 10.

EXERCICES.

I. Donner une limite de l'erreur commise, quand on s'arrête au n^{me} terme de l'une des séries :

$$\log(1+x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n}\right) + \dots$$

$$\log(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots\right),$$

$$\log(x+1) = \log x + x\left[\frac{1}{2x+2} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2x+2}\right)^3 + \dots\right].$$

II. Démontrer la formule

$$\log x = \frac{\log(x+1) + \log(x-1)}{2} + \left[\frac{1}{2x^2-1} + \frac{1}{3(2x^2-1)^3} + \cdots\right]$$

III. Démontrer la formule

$$\log(x+5) = \log(x+3) + \log(x-3) + \log(x+4) + \log(x-4)$$
$$-\log(x-5) - 2\log x + 2\left[\frac{72}{x^4-24x^2+72} + \frac{1}{3}\left(\frac{72}{x^4-25x^2+72}\right)^3 + \cdots\right].$$

CHAPITRE XXV.

NOTIONS GÉNÉRALES SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES.

---

321. La résolution des équations donne naissance à deux problèmes parfaitement distincts : leur résolution algébrique, c'est-à-dire la recherche de formules générales exprimant les racines en fonction des coefficients; et leur résolution numérique, c'est-à-dire l'ensemble des procédés au moyen desquels on peut, dans chaque cas, trouver approximativement la valeur numérique des racines. Il ne sera question, dans cet ouvrage, que du second des deux problèmes, et nous serons même bien loin de le traiter d'une manière complète. Nous nous bornerons strictement aux notions élémentaires qui composent actuellement le programme d'admission à l'école Polytechnique.

Postulatum.

322. Nous admettrons sans démonstration la proposition suivante, qui est fondamentale, et qui, hâtons-nous de le dire, peut se démontrer en toute rigueur :

Toute équation algébrique à une inconnue, ne renfermant que des puissances entières et positives de cette inconnue, et dont les coefficients sont des nombres donnés, réels ou imaginaires, admet au moins une racine réelle, ou une racine imaginaire de la forme $a+b\sqrt{-1}$. a *et* b *désignant deux nombres réels.*

Cette proposition étant admise, nous en déduirons facilement la suivante :

Théorème fondamental.

323. *Une équation du degré* m *de la forme*

$$[1] \qquad Ax^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \dots + A_m = 0,$$

Digitized by Google

dans laquelle $A_1, A_2, \ldots, A_m$ *représentent des nombres donnés, réels ou imaginaires, admet toujours précisément* m *racines réelles ou imaginaires.*

En représentant par X le premier membre de l'équation [1], $X = 0$ admet, en effet, par hypothèse (**322**), au moins une racine. Si nous désignons cette racine par la lettre a, qu'elle soit réelle ou imaginaire, X sera divisible par $x-a$. Désignons le quotient par Q; il sera, dans tous les cas, du degré $m-1$, et son premier terme sera Ax^{m-1}. Nous aurons identiquement :

$$[2] \qquad X = (x-a)Q.$$

Puisque, par hypothèse, toute équation a une racine, $Q = 0$ en admet une ; si nous la désignons par b, on aura :

$$Q = (x-b)Q_1,$$

et, par suite,

$$[3] \qquad X = (x-a)(x-b)Q_1.$$

D'après le même postulatum, l'équation $Q_1 = 0$, qui est du degré $m-2$, et dont le premier terme est évidemment Ax^{m-2}, doit admettre une racine. Si nous la désignons par c, on aura :

$$Q_1 = (x-c)Q_2,$$

et, par suite,

$$[4] \qquad X = (x-a)(x-b)(x-c)Q_2,$$

le premier terme de Q_2 étant évidemment Ax^{m-3}.

En continuant de la même manière, et opérant sur Q_2 comme on l'a fait sur Q et Q_1, chaque opération mettra en évidence un nouveau facteur du premier degré, et le degré des quotients successifs allant sans cesse en diminuant, on finira par en obtenir un qui sera numérique et évidemment égal à A. On aura donc :

$$[5] \qquad X = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k)(x-l)A.$$

A l'inspection de cette égalité, on reconnait que l'équation $X = 0$ est satisfaite pour les valeurs : $x=a$, $x=b$, $x=c$ ... $x=l$, et qu'elle ne peut l'être autrement, car toute autre valeur attribuée à x n'annulant aucun des facteurs du second membre, ne peut annuler le produit.

324. Remarque. Un produit de plusieurs facteurs n'est nul que quand l'un des facteurs est égal à zéro. Cela n'est évident que quand les facteurs sont réels; mais il est facile d'étendre la proposition au cas même où ils sont imaginaires.

Soit le produit $(a+b\sqrt{-1})(a'+b'\sqrt{-1})$,

on a

$$[1] \quad (a+b\sqrt{-1})(a'+b'\sqrt{-1}) = aa'-bb'+(ab'+ba')\sqrt{-1}.$$

Or on ne peut avoir à la fois :

$$[2] \qquad aa'-bb'=0, \quad ab'+ba'=0:$$

car, en faisant la somme des carrés de ces deux équations, on en conclurait :

$$[3] \qquad (aa'-bb')^2+(ab'+ba')^2=0.$$

Or, le premier membre de [3] est identiquement égal à $(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)$, et ne peut s'annuler que si l'on a $a=0$, $b=0$, ou bien $a'=0$, $b'=0$.

325. Remarque II. La formule [5] (**322**) permet de former le premier membre d'une équation du degré m, lorsque l'on connaît ses m racines. Ce premier membre ne contient rien d'arbitraire que le coefficient A, par lequel on peut évidemment multiplier une équation sans altérer les conditions qu'elle impose à l'inconnue. Il résulte de là que deux équations qui ont les mêmes racines ne peuvent différer que par un facteur constant.

Polynomes identiques.

326. Une équation du degré m ne pouvant avoir plus de m racines, il en résulte que deux polynomes du degré m en x ne peuvent être égaux pour plus de m valeurs de cette variable, sans être complétement identiques. Si, en effet, on égale leur différence à zéro, on obtiendra une équation du degré m, qui, si elle n'est pas identique, ne peut être satisfaite pour plus de m valeurs de la variable.

Racines égales.

327. Dans la démonstration que nous avons donnée (**322**), rien ne suppose que les racines désignées par $a, b, c \ldots k, l$ soient différentes. Le nombre des racines *distinctes* d'une équation du degré m n'est donc pas toujours réellement égal à m. On énonce cependant tous les théorèmes comme s'il en était ainsi, et pour en acquérir le droit, on dit qu'une racine a est double, triple ou quadruple, lorsque le facteur $x-a$, qui lui correspond, figure deux, trois, quatre fois dans le produit qui est égal au premier membre.

Racines imaginaires conjuguées.

328. Si une équation à coefficients réels admet une racine imaginaire

$$a+b\sqrt{-1},$$

elle admet nécessairement, et un même nombre de fois, la racine conjuguée

$$a-b\sqrt{-1}.$$

Si, en effet, l'équation $\quad X=0$

est satisfaite par l'hypothèse

$$x=a+b\sqrt{-1},$$

je dis que le premier membre X est divisible par $(x-a)^2+b^2$. Effectuons, en effet, la division, le reste, devant être de degré moindre que le diviseur, sera de la forme $mx+n$, et l'on aura

$$[1] \qquad X=[(x-a)^2+b^2]Q+mx+n,$$

m et n étant des nombres réels, puisqu'il n'a pu s'introduire dans le calcul aucune expression imaginaire.

Si dans les deux membres de l'équation [1], nous faisons $x=a+b\sqrt{-1}$, le premier membre s'annule par hypothèse. Il

en est évidemment de même de $(x-a)^2+b^2$, et, par suite, on doit avoir

$$0=m(a+b\sqrt{-1})+n,$$

ce qui exige :

$$ma+n=0,$$
$$mb=0,$$

et, par suite, b n'étant pas nul,

$$m=0,$$
$$n=0;$$

en sorte que

$$X=[(x-a)^2+b^2]Q.$$

Or $(x-a)^2+b^2$ s'annulant pour $x=a-b\sqrt{-1}$, cette équation prouve qu'il en est de même de X.

Si X est divisible par $(x-a-b\sqrt{-1})^2$, c'est-à-dire si la racine $a+b\sqrt{-1}$ est double, il faut que Q soit divisible par $x-a-b\sqrt{-1}$, on prouvera alors, comme on l'a fait pour X, qu'il admet aussi le facteur $(x-a)^2+b^2$, et l'on aura :

$$X=[(x-a)^2+b^2]^2Q_1=[x-(a+b\sqrt{-1})]^2[x-(a-b\sqrt{-1})]^2Q_1;$$

en sorte que la racine $a-b\sqrt{-1}$ se trouvera aussi deux fois dans X. Si X admet trois fois la racine $a+b\sqrt{-1}$, il doit être divisible par $(x-a-b\sqrt{-1})^3$, et, par suite, Q_1 doit admettre le facteur $x-a-b\sqrt{-1}$. On prouvera alors, comme on l'a fait pour X et pour Q, qu'il est divisible par $(x-a)^2+b^2$, et que l'on a :

$$X=[(x-a)^2+b^2]^3Q_2=[x-(a+b\sqrt{-1})]^3[x-(a-b\sqrt{-1})]^3Q_2;$$

en sorte que la racine $a-b\sqrt{-1}$ est triple, comme sa conjuguée. Le même raisonnement peut évidemment se continuer indéfiniment, et par conséquent la racine $a-b\sqrt{-1}$ a le même degré de multiplicité que sa conjuguée.

Relation entre les coefficients d'une équation et les racines.

329. Soit $x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_{m-1}x+A_m=0$,

une équation du degré m, dont nous supposons, pour plus de

simplicité, que le premier terme ait pour coefficient l'unité. Nous avons vu qu'en désignant par a, b, c ... k, l ses racines, on a identiquement :

$$[1]\quad x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_{m-1}x+A_m=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k)(x-l),$$

mais on sait qu'en effectuant le produit indiqué dans le second membre, on aura (**141**) pour premier terme x^m, pour second terme x^{m-1}, multiplié par la somme des seconds termes $-a$, $-b$, .., $-l$, pour troisième terme x^{m-2}, multiplié par la somme des produits deux à deux de $-a$, $-b$, $-c$, ..., $-l$, ou, ce qui revient au même, par la somme des produits deux à deux de a, b, ... l; et ainsi de suite, en sorte que si l'on représente par Σa, Σab, Σabc la somme des racines, la somme de leurs produits deux à deux, trois à trois, etc., on a

$$[2]\quad (x-a)(x-b)\ldots(x-k)(x-l) = x^m - x^{m-1}\Sigma a + x^{m-2}\Sigma ab + x^{m-3}\Sigma abc + \ldots, \pm abc\ldots kl,$$

le dernier terme étant positif ou négatif, suivant que m est pair ou impair. En identifiant ce produit avec le premier membre de l'équation [1], on conclut le théorème suivant :

Dans toute équation algébrique dont le premier terme a pour coefficient l'unité :

$$x^m + A_1x^{m-1} + \ldots A_{m-1}x + A_m = 0,$$

le coefficient du second terme A_1 est égal à la somme des racines prise en signe contraire.

Le coefficient du troisième terme est égal à la somme des produits deux à deux des racines.

Le coefficient du quatrième terme est la somme de leurs produits trois à trois pris en signe contraire, et ainsi de suite.

Enfin, le dernier terme est égal au produit de toutes les racines, pris avec son signe ou avec un signe contraire, suivant que le degré de l'équation est pair ou impair.

Ce théorème s'exprime par les équations suivantes :

$$[3]\quad \begin{cases} A_1 = -(a+b+c+\ldots+k+l); \\ A_2 = (ab+ac+\ldots+bc+\ldots kl); \\ A_3 = -(abc+abd+\ldots+acd+\ldots+akl+\ldots); \\ \vdots \\ A_m = \pm abc\ldots kl. \end{cases}$$

En considérant les racines comme des inconnues, nous avons là m équations distinctes auxquelles elles doivent satisfaire; lorsque l'on connaîtra quelques-unes des racines, ces équations pourront faciliter la recherche des autres, mais elles ne peuvent pas servir, en général, à la résolution complète de l'équation proposée. Si, en effet, on cherchait, par le moyen de ces équations à déterminer une racine, a par exemple, il faudrait, pour cela, éliminer toutes les autres; or, quel que soit le moyen que l'on emploie, je dis que l'équation obtenue devra avoir pour solution non-seulement la valeur a, mais encore les autres racines $b, c \ldots k, l$. Si l'on remarque, en effet, que les racines entrent absolument de même dans les équations [3], que rien ne les y distingue les unes des autres, on conclura que si l'on parvient par certains calculs à éliminer toutes les racines à l'exception de a, des calculs tout semblables auraient pu éliminer toutes les racines autres que b par exemple, et qu'il ne doit y avoir dans le résultat d'autre différence que le changement de a en b : c'est donc la même équation à laquelle a et b doivent satisfaire, et, comme on peut en dire autant des autres racines, il est évident que l'équation en a doit avoir pour racines $a, b, c \ldots k, l$, et qu'elle ne doit, par conséquent (325), pas différer de l'équation proposée elle-même. Cette conclusion peut d'ailleurs se vérifier d'une manière bien simple.

Reprenons en effet les équations [3]

$$\begin{aligned} &A_1 = -(a+b+c+\ldots+k+l); \\ &A_2 = (ab+ac+\ldots); \\ &A_3 = -(abc+abd+\ldots); \\ &\vdots \\ &A_m = \pm abc\ldots kl. \end{aligned}$$

Multiplions la première par a^{m-1}, la seconde par a^{m-2}, la troi-

Digitized by Google

sième par a^{m-3}..., la dernière par a, et ajoutons-les, on reconnaîtra facilement que l'on obtient ainsi l'équation

$$A_1a^{m-1} + A_2a^{m-2} + \ldots + A_m = - a^m,$$

qui n'est autre chose que l'équation proposée dans laquelle x est remplacé par a.

330. Remarque I. Il ne faut pas affirmer, en vertu de ce qui précède, que les équations [3] ne peuvent jamais conduire à la résolution d'une équation algébrique. Il est prouvé seulement, qu'en cherchant à atteindre ce but, par l'élimination de $m-1$ des racines cherchées on serait ramené à l'équation proposée elle-même, mais on peut concevoir d'autres manières de procéder; cherchons, par exemple, à déterminer les deux racines a et b de l'équation

$$x^2 + A_1x + A_2 = 0;$$

en faisant usage des relations

$$a + b = - A_1,$$
$$ab = A_2.$$

Formons le carré de la première équation, et retranchons-en membre à membre la seconde équation après avoir multiplié tous les termes par 4, il viendra

$$(a+b)^2 - 4ab = A_1^2 - 4A_2;$$

ou

$$(a-b)^2 = A_1^2 - 4A_2,$$
$$a - b = \pm\sqrt{A_1^2 - 4A_2}.$$

Connaissant $a+b$ et $a-b$, on en conclut facilement a et b.

RÉSUMÉ.

321. But que l'on se propose dans la résolution des équations.—**322**. On admet que toute équation a une racine.—**323**. On en conclut que toute équation de degré m admet m racines réelles ou imaginaires. — **324**. Un produit de m facteurs réels ou imaginaires ne peut être nul que si l'un des facteurs est égal à zéro. — **325**. Le premier membre d'une équation est déterminé, lorsque l'on connaît toutes les racines.—**326**. Deux polynomes de degré m sont identiques, s'ils sont égaux pour plus de m valeurs de la

Digitized by

variable. — **327**. Définition des racines égales. — **328**. Si une équation à coefficient réel admet une racine imaginaire, elle admet le même nombre de fois sa conjuguée. — **329**. Relations entre les coefficients d'une équation et les racines. — Si l'on élimine entre ces relations toutes les racines excepté une, on retombe sur l'équation proposée. — **330**. On ne doit pas affirmer cependant que ces relations ne puissent pas conduire à la résolution de l'équation.

EXERCICES.

I. Si $F(x)=0$ est une équation à coefficients rationnels, irréductible, c'est-à-dire telle qu'aucune de ses racines ne puisse satisfaire à une équation de degré moindre et à coefficients rationnels; si une équation de degré quelconque à coefficients rationnels admet une ou plusieurs fois une racine de $F(x)=0$, elle les admettra toutes le même nombre de fois.

II. Si l'équation $x^3+px+q=0$, où p et q désignent des nombres rationnels, n'a pas de racine commensurable, elle ne peut pas non plus avoir de racine de la forme $a+\sqrt{b}$, a et b étant rationnels.

III. Si une équation à coefficients rationnels admet une racine de la forme $a+\sqrt[3]{b}$, son premier membre est divisible par $(x-a)^3-b$.

IV. Si une équation a pour racines $a, \frac{1}{a}, b, \frac{1}{b}, c, \frac{1}{c}$, etc., vérifier par la multiplication des facteurs du premier degré qui composent son premier membre, que les coefficients des termes à égale distance des extrêmes sont égaux.

V. Si l'on remplace dans le premier membre d'une équation x par $x+y\sqrt{-1}$, ce premier membre prendra la forme

$$P+Q\sqrt{-1}.$$

Le postulatum admis (**322**) revient à supposer que les courbes qui ont pour équations

$$P=0, \quad Q=0$$

se coupent toujours. Prouver, en admettant cela, que la rencontre a toujours lieu à angle droit.

VI. Si $F(x,y)=0$ est l'équation d'une courbe algébrique du degré m, que l'on mène par l'origine O des coordonnées une droite qui *coupe cette courbe* en m points A, B, C ... K, L, et que l'on détermine un point M, tel que

$$\frac{1}{\overline{OM}^2}=\frac{1}{\overline{OA}^2}+\frac{1}{\overline{OB}^2}+\frac{1}{\overline{OC}^2}+\ldots+\frac{1}{\overline{OL}^2};$$

le lieu des points M sera une section conique.

VII. Si une série de cordes parallèles coupent une courbe algébrique en m points, le lieu des centres des moyennes distances de ces points est une ligne droite.

VIII. Pour que toutes ces droites passent par l'origine lorsque les cordes parallèles changent de direction, il faut qu'il n'y ait pas, dans l'équation, de terme de degré $m-1$.

IX. Pour que toutes ces droites soient parallèles entre elles, lorsque l'on change la direction des cordes, il faut que les termes de degré m forment la puissance m^{me} exacte d'un binome de la forme $ax+by$.

CHAPITRE XXVI.

NOTIONS GÉNÉRALES SUR LES MOYENS DE RECONNAITRE L'EXISTENCE DES RACINES RÉELLES.

---

331. On ne connait pas de formules générales qui fournissent les racines d'une équation algébrique, et l'on est réduit, dans chaque cas, à des tâtonnements qui, après avoir fait connaître leur existence, permettent d'en obtenir une valeur approchée. Le principe de la méthode que l'on développe dans un des chapitres suivants, repose sur plusieurs théorèmes fort simples que nous devons dès à présent, faire connaître.

LEMME I. *Le polynome*

$$F(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m$$

est une fonction continue de la variable x, *c'est-à-dire que l'on peut faire croître la variable* x *par degrés assez petits pour que les variations du polynome soient aussi petites qu'on le voudra.*

Nous avons vu, en effet (**294**), que le rapport

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

a une limite finie et égale à $F'(x)$ lorsque h tend vers zéro. Or, il faut évidemment pour cela que le numérateur décroisse indéfiniment, et que la différence entre $F(x+h)$ et $F(x)$ puisse devenir aussi petite qu'on le voudra.

332. THÉORÈME I. *Si deux nombres* α *et* β, *substitués à* x *dans le polynome* X, *donnent des résultats de signes contraires, ils comprennent au moins une racine réelle de l'équation* $X = 0$.

Si l'on conçoit, en effet, que x varie d'une manière continue depuis la valeur $x = a$ jusqu'à $x = b$, le polynome X, en vertu du lemme précédent, variera aussi d'une manière continue; et comme les valeurs extrêmes sont de signes différents, il doit

Digitized by Google

passer du positif au négatif, ou du négatif au positif, et il est impossible qu'il ne prenne pas la valeur intermédiaire 0.

Remarque. Le théorème précédent s'applique évidemment à toute équation $f(x)=0$, dont le premier membre est une fonction continue de x. Nous en avons vu un exemple (**236**).

333. Théorème II. *Si deux nombres* α *et* β, *substitués à* x *dans le premier membre d'une équation algébrique* $X=0$, *donnent des résultats de signes contraires, ils comprennent un nombre impair de racines.*

Il faut entendre que les racines multiples sont comptées un nombre de fois égal à leur degré de multiplicité.

Soient a, b, ..., p les racines comprises entre α et β, Q le quotient de la division de X par $(x-a)(x-b)...(x-p)$; en sorte que

$$X=(x-a)(x-b)\dots(x-p)Q.$$

Q désignant le produit des facteurs qui correspondent aux racines imaginaires et aux racines réelles non comprises entre α et β. Si l'on fait successivement, dans cette équation, $x=\alpha$, $x=\beta$, on aura

$$X_\alpha=(\alpha-a)(\alpha-b)\dots(\alpha-p)Q_\alpha,$$
$$X_\beta=(\beta-a)(\beta-b)\dots(\beta-p)Q_\beta,$$

X_α, Q_α, X_β, Q_β désignant ce que deviennent les polynomes X, Q, lorsque l'on y substitue à x la valeur α ou la valeur β. Par hypothèse, X_α et X_β sont de signes contraires. Il doit donc en être de même des seconds membres. Or Q_α et Q_β sont de mêmes signes: car, sans cela, l'équation $Q=0$ aurait une racine au moins (**332**) comprise entre α et β. Il faut donc que les produits

$$(\alpha-a)(\alpha-b)\dots(\alpha-p),$$
$$(\beta-a)(\beta-b)\dots(\beta-p)$$

soient de signes contraires; et comme tous les facteurs du premier sont négatifs, et tous ceux du second positifs, il faut évidemment que le nombre de ces facteurs, et, par suite, le nombre des racines a, b, ..., p soit impair.

334. On verrait absolument de même que si deux nombres donnent des résultats de même signe, ils contiennent un nombre pair de racines (ce nombre peut être zéro).

Substitution d'une très-grande valeur de x.

335. THÉORÈME. *Si l'on attribue à la variable* x *des valeurs absolues de plus en plus grandes, le polynome*

[1] $$X = Ax^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \dots A_m$$

finira par prendre le signe de son premier terme.

Le polynome X peut, en effet, s'écrire de la manière suivante :

$$x^m\left(A + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \dots + \frac{A_m}{x^m}\right).$$

Lorsque l'on attribue à x des valeurs de plus en plus grandes, les termes $\frac{A_1}{x}$, $\frac{A_2}{x^2}$ ... tendent évidemment vers zéro, et, par suite, l'expression entre parenthèses s'approche indéfiniment de la limite A, et finit évidemment par prendre le même signe que ce coefficient. Son produit par x^m, c'est-à-dire X, prend alors le signe de Ax^m.

336. REMARQUE. Si l'on suppose A positif, lorsque m est pair, Ax^m est positif, quel que soit le signe de x. Un polynome algébrique de degré pair, dont le premier terme a un coefficient positif, prend donc toujours des valeurs positives, lorsque l'on attribue à la variable des valeurs très-grandes positives ou négatives.

Lorsque m est impair, A étant toujours supposé positif, Ax^m est de même signe que x. Un polynome algébrique de degré impair, dont le premier terme a un coefficient positif, prend donc des valeurs de même signe que la variable, lorsque celle-ci est très-grande en valeur absolue.

Substitution d'une valeur très-petite de x.

337. THÉORÈME. *Si dans le polynome* $x^m + A_1x^{m-1} + \dots + A_nx^{m-n}$, *on suppose à* x *des valeurs absolues de plus en plus petites, le polynome finira par prendre le signe de son dernier terme.*

On a, en effet,

$$x^m + A_1x^{m-1} + \dots + A_nx^{m-n} = x^{m-n}(x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_{n-1}x + A_n).$$

Digitized by Google

Lorsque la valeur absolue de x devient très-petite, l'expression entre parenthèses a évidemment pour limite A_n; elle finit donc par prendre le signe de ce coefficient. Son produit par x^{m-n}, c'est-à-dire le polynome proposé, finit donc par prendre le signe de $A_n x^{m-n}$.

Cas où une équation admet certainement des racines réelles.

338. THÉORÈME. *Toute équation de degré impair a au moins une ou un nombre impair de racines réelles de signes contraires à son dernier terme.*

Soit $$x^{2m+1} + A_1 x^{2m} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

une équation de degré impair, dont le dernier terme A_m est négatif. Si nous substituons à x la valeur 0, le premier membre de l'équation deviendra $+A_m$, et par conséquent négatif. Si nous substituons ensuite à x une valeur positive très-grande N, le premier membre prendra (**335**) le signe de son premier terme, et deviendra par conséquent positif. Ainsi donc, les nombres 0 et N, substitués dans l'équation, donnent des résultats de signes contraires, ils comprennent par conséquent (**333**) un nombre impair de racines, qui évidemment sont positives.

Si le dernier terme de l'équation proposée était positif, on substituerait à x la valeur 0, qui donnerait un résultat positif, et une valeur négative très-grande, abstraction faite du signe —N, qui lui ferait acquérir (**336**) une valeur négative. 0 et —N donnant des résultats de signes contraires, comprennent un nombre impair de racines, qui évidemment sont négatives, c'est-à-dire de signes contraires au dernier terme.

339. THÉORÈME. *Toute équation de degré pair, dont le dernier terme est négatif, a au moins deux racines réelles : l'une positive, l'autre négative.*

Si, en effet, dans une semblable équation, nous substituons à x la valeur 0 et une valeur positive très-grande N, nous obtiendrons deux résultats de signes contraires; donc l'équation a au moins une racine positive.

Si nous substituons ensuite la valeur 0 et une valeur négative très-grande —N, nous aurons encore deux résultats de signes contraires; donc l'équation a au moins une racine négative.

Remarque. Le seul cas où l'on ne soit pas assuré qu'il existe une racine réelle au moins, est celui où l'équation, étant de degré pair, a son dernier terme positif.

RÉSUMÉ.

331. Un polynome entier, par rapport à une variable, est une fonction continue de cette variable. — **332**. Si deux nombres substitués à la variable dans le premier membre d'une équation donnent des résultats de signes contraires, ils comprennent au moins une racine réelle. — **333**. Si deux nombres substitués dans le premier membre d'une équation donnent des résultats de signes contraires, ils comprennent un nombre impair de racines réelles. — **334**. Si deux nombres donnent des résultats de mêmes signes, ils comprennent un nombre pair de racines réelles. — **335**. Si l'on attribue à la variable des valeurs de plus en plus grandes, le polynome finit par prendre le signe de son premier terme. — **336**. Un polynome de degré pair est positif lorsque la valeur absolue de la variable est très-grande. — **337**. Si l'on attribue à la variable des valeurs de plus en plus petites, le polynome prend le signe de son dernier terme. — **338**. Toute équation de degré impair admet un nombre impair de racines de signes contraires à son dernier terme. — **339**. Toute équation de degré pair dont le dernier terme est négatif, admet un nombre impair de racines positives, et un nombre impair de racines négatives.

EXERCICES.

I. Prouver que x^x a pour limite l'unité, lorsque x tend vers zéro. En conclure que l'équation

$$x^x = 0,9$$

admet deux racines réelles.

II. Trouver le maximum du produit $x(p - x^2)$ (voy. chap. XI). En conclure la condition pour que l'équation

$$x(p - x^2) = q$$

admette deux racines positives.

III. Généraliser la recherche précédente, et chercher la condition pour que l'équation

$$x^m - px^n + q = 0.$$

Digitized by Google

p et q désignant des nombres positifs, admette deux racines positives.

IV. L'équation à m termes

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\dots+\frac{L}{x-l}=K$$

admet m racines réelles, si a, b, c, ..., l représentent des nombres distincts.

Digitized by Google

CHAPITRE XXVII.

THÉORIE DES RACINES ÉGALES.

But de la théorie des racines égales.

340. Les procédés employés pour la résolution des équations numériques, exigent que ces équations n'admettent pas de racines égales. Il est donc essentiel de résoudre les deux questions suivantes.

1° Une équation algébrique étant donnée, reconnaître si elle a des racines égales.

2° Une équation ayant des racines égales, ramener sa résolution à celle de plusieurs autres équations de degré moindre et dont les racines soient inégales.

Moyen de reconnaître si une équation a des racines égales.

341. On dit qu'une équation $\varphi(x)=0$, admet n fois la racine a, lorsque $\varphi(x)$ est divisible par $(x-a)^n$; le théorème suivant exprime les conditions nécessaires pour qu'il en soit ainsi.

THÉORÈME I. *Pour qu'un nombre* a *soit* n *fois racine d'une équation algébrique* $\varphi(\mathrm{x})=0$, *il est nécessaire et suffisant que, substitué à* x, *il annule la fonction* $\varphi(\mathrm{x})$ *et ses* $\mathrm{n}-1$ *premières dérivées.*

On a, en effet, identiquement

$$x=a+(x-a),$$
$$\varphi(x)=\varphi[a+(x-a)].$$

En développant $\varphi(a+x-a)$ par la formule générale donnée (**290**)

$$\varphi(x)=\varphi(a)+\varphi'(a)(x-a)+\varphi''(a)\frac{(x-a)^2}{1.2}+\ldots+\frac{\varphi^n(a)(x-a)^n}{1.2\ldots n}$$
$$+\ldots+\frac{\varphi^m(a)}{1.2\ldots m}(x-a)^m.$$

A la seule inspection de cette formule, on voit que la condition énoncée est suffisante. Si l'on a, $\varphi(a)=0$, $\varphi'(a)=0$, $\varphi^{n-1}(a)=0$, tous les termes restant dans le second membre contiendront $(x-a)^n$ en facteur, et $\varphi(x)$ sera par conséquent divisible par $(x-a)^n$.

Je dis de plus que cette condition est nécessaire; supposons en effet que $\varphi(x)$ étant divisible par $(x-a)^n$, et $\varphi^p(x)$ étant la première des dérivées de $\varphi(x)$ qui ne s'annule pas pour $x=a$, on ait $p<n$, l'équation précédente deviendra

$$\varphi(x)=\frac{\varphi^p(a)}{1.2...p}(x-a)^p+\frac{\varphi^{p+1}(a)}{1.2...(p+1)}(x-a)^{p+1} + ... + \frac{\varphi^m(a)}{1.2...m}(x-a)^m;$$

si l'on divise les deux membres par $(x-a)^p$, il vient

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^p}=\frac{\varphi^p(a)}{1.2...p}+\frac{\varphi^{p+1}(a)}{1.2...p+1}(x-a)+...+\frac{\varphi^m(a)}{1.2...m}(x-a)^{m-p}$$

égalité impossible, car $\varphi(x)$ renfermant par hypothèse $(x-a)^n$ en facteur, et n étant plus grand que p, le premier membre s'annule pour $x=a$, et le second prend une valeur différente de zéro, savoir : $\frac{\varphi^p(a)}{1.2...p}$.

On peut déduire du théorème précédent, les conditions suivantes.

342. Théorème II. *Pour qu'un nombre* a *soit* n *fois racine d'une équation algébrique* $\varphi(x)=0$, *il est nécessaire et suffisant que substitué à* x, *il annule le polynome* $\varphi(x)$ *et qu'il soit, en outre,* $n-1$ *fois racine de l'équation* $\varphi'(x)=0$.

Il résulte, en effet, du théorème précédent que les conditions nécessaires et suffisantes sont exprimées par les équations

$$\varphi(a)=0,\ \varphi'(a)=0\ ...,\ \varphi^{n-1}(a)=0,$$

dont les $m-1$ dernières expriment que a est racine de l'équation $\varphi'(x)=0$ et de ses $(m-2)$ premières dérivées, et, par suite, en vertu du théorème précédent, que a est $m-1$ fois racine de l'équation $\varphi'(x)=0$.

343. Remarque. Il résulte du théorème précédent que si l'on

décompose le premier membre d'une équation et sa dérivée en facteurs simples correspondants à leurs diverses racines, à chaque racine multiple a, entrant n fois dans l'équation, correspondront, dans la dérivée, $n-1$ facteurs égaux à $(x-a)$, en sorte que, si une équation $\varphi(x)=0$ admet n racines égales à a, p racines égales à b, q racines égales à c, r racines égales à d, etc., on a

$$\varphi(x)=(x-a)^n(x-b)^p(x-c)^q(x-d)^r\ldots,$$
$$\varphi'(x)=(x-a)^{n-1}(x-b)^{p-1}(x-c)^{q-1}(x-d)^{r-1}\ldots,$$

et, par suite, $\varphi(x)$ et $\varphi'(x)$ admettent les facteurs communs $(x-a)^{n-1}$, $(x-b)^{p-1}$, $(x-c)^{q-1}$, $(x-d)^{r-1}$. Je dis de plus qu'ils n'en admettent pas d'autres, car, s'ils admettaient un facteur commun $(x-k)$, k serait racine de $\varphi(x)$ et de $\varphi'(x)$, et, par suite (**341**), racine double de $\varphi(x)$.

Recherche des facteurs communs à deux polynomes.

344. Pour faire usage des théorèmes précédents et reconnaître si une équation donnée admet des racines égales, il suffit de savoir reconnaître si le premier membre de l'équation et sa dérivée admettent des facteurs communs. Nous résoudrons, en général, la question suivante : *deux fonctions entières d'une variable* x *étant données, trouver le produit des facteurs du premier degré qui leur sont communs.*

Soient $F(x)$ et $f(x)$, les deux fonctions données. Supposons que $F(x)$ soit d'un degré au moins égal à $f(x)$; divisons $F(x)$ par $f(x)$, soit Q le quotient et R le reste, on aura

$$F(x)=f(x)\times Q+R.$$

Or, il est évident, d'après cette égalité, que si l'on suppose R décomposé en facteurs correspondants aux racines de l'équation $R=0$, les facteurs communs à $F(x)$ et $f(x)$ sont absolument les mêmes que les facteurs communs à $f(x)$ et à R. On verra, de même, qu'en nommant R′ le reste de la division de $f(x)$ par R, les facteurs communs à R′ et R sont les mêmes que les facteurs communs à $f(x)$ et R, et par suite à $f(x)$ et $F(x)$, et, en continuant de la même manière on substituera, aux deux polynomes donnés, des polynomes de degré de plus en plus petit, et l'opération s'arrêtera lorsque l'un d'eux sera divisible par le suivant, ce

dernier exprimera alors le produit des facteurs communs cherchés. Si l'on parvient à un reste numérique avant d'avoir obtenu une division qui réussisse, il faut en conclure que les polynomes proposés n'ont aucun facteur commun.

En appliquant la méthode précédente à un polynome $\varphi(x)$ et à sa dérivée, on verra si l'équation $\varphi(x)=0$ admet des racines multiples, et l'on obtiendra le produit des facteurs qui correspondent à ces racines, élevés chacun à une puissance moindre d'une unité que dans $\varphi(x)$.

Remarque. En cherchant le produit des facteurs communs à deux polynomes fonctions de x, on ne se préoccupe aucunement des facteurs numériques. On peut donc multiplier l'une des fonctions considérées, ou l'un des restes obtenus dans l'opération, par un facteur numérique quelconque. On profite souvent de cette remarque pour éviter l'introduction des dénominateurs. Il suffit, en effet, pour cela, de multiplier, avant chaque division partielle, le dividende par le coefficient du premier terme du diviseur.

Réduction d'une équation qui a des racines égales.

345. Les théorèmes précédents permettent de ramener la résolution d'une équation qui a des racines égales, à celle de plusieurs autres équations qui n'en ont pas. Considérons, en effet, une équation $\varphi(x)=0$, et concevons son premier membre décomposé en facteurs correspondants à ses racines. Soient X_1, X_2, X_3, X_4 les produits des facteurs de chaque degré de multiplicité, pris chacun une fois seulement, savoir : X_1 le produit des facteurs simples; X_2 le produit des facteurs qui correspondent à des racines doubles, pris chacun une fois seulement, et ainsi de suite; en sorte que l'on ait

$$\varphi(x)=X_1X_2^2X_3^3X_4^4.$$

Le produit des facteurs communs au polynome X et à sa dérivée, est, d'après les théorèmes précédents,

$$P=X_2X_3^2X_4^3.$$

Le produit P_1 des facteurs communs à P et à sa dérivée, est de même

$$P_1=X_3X_4^2.$$

Enfin, le produit P_2 des facteurs communs à P_1 et à sa dérivée est

$$P_2 = X_4.$$

Si l'équation proposée n'admet pas de racines dont le degré de multiplicité surpasse 4, P_2 n'aura plus de facteurs communs avec sa dérivée, sinon il faudrait continuer à opérer de la même manière. Maintenant, en divisant chacune des équations précédentes par la suivante, il vient :

$$\frac{\varphi(x)}{P} = X_1X_2X_3X_4,$$

$$\frac{P}{P_1} = X_2X_3X_4,$$

$$\frac{P_1}{P_2} = X_3X_4,$$

$$P_2 = X_4,$$

et en divisant chacune de celles-ci par la suivante :

$$\frac{\varphi(x)P_1}{P^2} = X_1, \quad \frac{PP_2}{P_1^2} = X_2, \quad \frac{P_1}{P_2^2} = X_3, \quad P_2 = X_4.$$

On pourra donc, par de simples divisions, trouver X_1, X_2, X_3, X_4, et en résolvant les équations,

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0, \quad X_4 = 0,$$

qui n'ont plus de racines multiples, on obtiendra séparément les racines simples, doubles, triples, quadruples... de la proposée.

RÉSUMÉ.

340. But et utilité de la théorie des racines égales. — 341. Pour qu'une équation admette n fois la racine a, il faut et il suffit que a annule le premier membre, et les $n-1$ premières dérivées. — 342. On peut dire aussi que a, pour être n fois racine, doit annuler le premier membre de l'équation proposée, et être $n-1$ fois racine de sa dérivée. — 343. Le produit des facteurs communs au premier membre d'une équation et à la dérivée est le produit des facteurs correspondants aux racines multiples pris chacun avec un exposant moindre d'une unité. — 344. Recherche du produit des facteurs communs à deux polynomes. — 345. Réduction d'une équation qui a des racines égales à d'autres qui n'en ont pas.

Digitized by Google

EXERCICES.

I. P et Q désignant deux polynomes en x, qui n'admettent aucun facteur commun, et P′ et Q′ leurs dérivées, si l'équation $P^2 + Q^2 = 0$ admet deux racines égales, ces racines appartiennent à l'équation $P'^2 + Q'^2 = 0$.

II. Si a, b, c, d désignent les racines de l'équation $f(x) = 0$, on peut mettre la dérivée sous la forme

$$\frac{f(x)}{x-a} + \frac{f(x)}{x-b} + \dots + \frac{f(x)}{x-l}.$$

III. Déduire de la proposition précédente que la dérivée s'annule pour $x = a$, lorsque a est une racine multiple de la proposée.

IV. Si $\varphi(x) = 0$ est une équation algébrique, et que a soit m fois racine, elle sera $m - 1$ fois racine de l'équation obtenue en multipliant les termes de la proposée, supposée complète, par les termes successifs d'une progression arithmétique.

CHAPITRE XXVIII.

THÉORÈME DE DESCARTES.

346. Il existe plusieurs démonstrations du théorème qui fait l'objet de ce chapitre. Celle que nous adoptons nous paraît avoir le double avantage d'être aussi simple qu'aucune autre, et de faire connaître quelques propositions auxiliaires curieuses et utiles. Nous commencerons par établir ces propositions.

LEMME. *Une fonction quelconque* $\varphi(x)$ *est croissante ou décroissante, pour une certaine valeur de la variable, suivant que la dérivée* $\varphi'(x)$ *est positive ou négative.*

On dit qu'une fonction est croissante, lorsque sa valeur augmente quand on attribue à la variable dont elle dépend un accroissement *très-petit*. D'après cela, il est évident que le rapport $\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$ sera positif ou négatif, pour des valeurs très-petites de h, suivant que la fonction sera croissante ou décroissante. Il en sera donc de même de la limite de ce rapport, qui est précisément la dérivée $\varphi'(x)$.

347. THÉORÈME I. *Si une fonction de* x *s'annule pour une valeur particulière* $x=a$, *pour une valeur moindre* $x=a-h$, *elle sera de signe contraire à sa dérivée; et pour une valeur plus grande* $x=a+h$, *elle sera de même signe qu'elle,* h *désignant un nombre positif suffisamment petit*

Si, en effet, la fonction $\varphi(x)$ s'annule pour $x=a$, si l'on fait croître x à partir de la valeur $a-h$, il est évident que la fonction $\varphi(x)$ devant tendre vers zéro, doit, pour cela, croître si elle est négative, et décroître si elle est positive. Il faut donc, dans le premier cas (**346**), que sa dérivée soit positive, et qu'elle soit négative dans le second, c'est-à-dire qu'elle soit, dans chaque cas, de signe contraire à la fonction. Si, au contraire, on fait croître x depuis a jusqu'à $a+h$, la fonction $\varphi(x)$, d'abord égale à zéro, doit croître pour devenir positive, ou décroître pour de-

Digitized by Google

venir négative. Dans le premier cas (346), la dérivée sera positive, et dans le second négative ; $\varphi'(a+h)$ est donc, dans tous les cas, de même signe que $\varphi(a+h)$.

Remarque. La démonstration précédente suppose h assez petit pour que $\varphi(x)$ varie toujours dans le même sens, de $a-h$ jusqu'à a, et de a à $a+h$. Il suffit évidemment, pour cela que h soit assez petit pour que $\varphi'(x)$ ne change pas de signe, et, par suite, pour qu'elle ne s'annule pas dans l'un de ces deux intervalles. Mais rien n'empêche que cette dérivée ne soit égale à zéro pour $x=a$. La démonstration précédente s'applique, par conséquent, au cas où a est une racine multiple.

348. Théorème II. *Si* $\varphi(x)$ *représente une fonction continue de* x, *dont la dérivée* $\varphi'(x)$ *soit aussi continue, entre deux racines consécutives* a *et* b *de l'équation* $\varphi(x)=0$, *il se trouve toujours une racine de l'équation* $\varphi'(x)=0$.

Supposons, en effet, que b soit la plus grande des deux racines a et b. Si l'on désigne par h un nombre très-petit, il n'y aura, entre $a+h$ et $b-h$, aucune racine de l'équation proposée, et, par suite, $\varphi(a+h)$ et $\varphi(b-h)$ seront de mêmes signes. Mais (347) $\varphi(a+h)$ est de même signe que $\varphi'(a+h)$, $\varphi(b-h)$ de signe contraire à $\varphi'(b-h)$; donc $\varphi'(a+h)$ et $\varphi'(b-h)$ sont de signes contraires, et, par suite, l'équation $\varphi'(x)=0$ admet au moins (332) une racine comprise entre $a+h$ et $b-h$, et, par suite, entre a et b.

Remarque. Si l'on range par ordre de grandeur les racines d'une équation $\varphi(x)=0$:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,$$

il y aura au moins une racine de la dérivée entre a_1 et a_2, une entre a_2 et a_3..., une entre a_{n-1} et a_n. Si n racines consécutives, a_k, a_{k+1}, ..., a_{k+n-1} sont égales entre elles, le théorème n'en subsiste pas moins : car il doit y avoir (342) $n-1$ racines de la dérivée égales à chacune d'elles, et l'on peut considérer l'une comme comprise entre a_k et a_{k+1}, l'autre entre a_{k+1} et a_{k+2}, etc.

Théorème de Descartes.

349. Si, dans une équation algébrique de degré m :

$$x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots A_px^{m-p} + A_qx^{m-q} = 0,$$

on considère successivement les différents termes, on dit qu'il y a une variation chaque fois que deux termes consécutifs sont de signes contraires, et permanence quand ils sont de mêmes signes. Le théorème de Descartes consiste en ce que *le nombre des racines positives* (non compris les racines nulles, s'il y en a) *ne peut jamais surpasser le nombre des variations du premier membre*.

Pour démontrer cette proposition, nous ferons voir que si elle est admise pour une équation de degré $m-1$, elle est vraie, par cela même, pour une équation de degré m.

Admettons donc que, dans une équation de degré $m-1$, le nombre des racines positives ne peut surpasser le nombre de variations de son premier membre, et prouvons qu'il en est de même dans une équation de degré m.

Soit l'équation

[1] $\varphi(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} - \ldots + A_p x^{m-p} + A_m = 0.$

Soit V le nombre des variations de son premier membre, et $p_1, p_2, \ldots, p_k$ les racines positives, en nombre k, et rangées par ordre de grandeur ; il faut prouver que l'on a

$$V \geqq k.$$

Pour cela, considérons la dérivée de l'équation proposée :

[2] $\varphi'(x) = mx^{m-1} + (m-1)A_1 x^{m-2} + \ldots + (m-p)A_p x^{m-p-1}.$

Elle a tous les termes de mêmes signes que ceux de [1] ; le dernier seul a disparu. Elle aura donc le même nombre V de variations, ou un nombre $V-1$, moindre d'une unité, selon que les termes $A_p x^{m-p}$ et A_m formeront ou non une variation, qui, évidemment, a pu seule disparaître.

Considérons successivement ces deux cas :

1° Supposons les termes $A_p x^{m-p}$ et A_m de mêmes signes. La dérivée $\varphi'(x)$ a alors le même nombre de variations V que $\varphi(x)$. Nous allons voir qu'elle a aussi k racines positives au moins. On sait, en effet (348), que les racines positives de l'équation proposée étant $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$, la dérivée en a une au moins entre p_1 et p_2, une entre p_2 et $p_3 \ldots$, une entre p_{k-1} et p_k, ce qui fait, en tout, $k-1$ racines positives, dont l'existence est certaine. Je dis, de plus, qu'il y en a une comprise entre 0 et p_1, et qui complète le nombre k. Substituons, en effet, dans le premier membre de $\varphi'(x)$ les deux nombres h et p_1-h, par la substitution du nom-

bre très-petit h, $\varphi'(x)$ prendra (337) le signe du terme qui contient h avec le moindre exposant, c'est-à-dire le signe de A_p.

Par la substitution de p_1-h, p_1 étant racine, $\varphi'(x)$ prendra (347) un signe opposé à celui de $\varphi(x)$. Or la proposée n'ayant aucune racine entre 0 et p_1, ni, par suite, entre 0 et p_1-h, $\varphi(0)$ et $\varphi(p_1-h)$ sont (332) de mêmes signes. $\varphi(0)$ est égal à A_m; $\varphi(p_1-h)$ est donc de même signe que A_m, par suite, de même signe que A_p; donc $\varphi'(p_1-h)$ est de signe contraire à A_p. Or $\varphi'(h)$ est, comme nous l'avons dit plus haut, de même signe que A_p; $\varphi'(p_1-h)$ et $\varphi'(h)$ sont donc de signes différents; donc enfin l'équation $\varphi'(x)=0$ admet une racine positive comprise entre h et p_1-h, ou, ce qui revient au même, entre 0 et p_1. Cette racine, jointe aux $k-1$ autres, dont l'existence a été démontrée plus haut, fait, en tout, k racines positives. Or, l'équation $\varphi'(x)=0$ étant de degré $m-1$, le théorème de Descartes s'y applique par hypothèse. Le nombre V de ses variations ne peut donc être moindre que k, et l'on a, comme on voulait le démontrer,

$$V \geqq k.$$

2° Supposons que les termes $A_p x^{m-p}$ et A_m soient de signes contraires, la dérivée $\varphi'(x)$ n'aura que $V-1$ variations, puisque celle que formaient ces deux termes disparaîtra avec le terme A_m. Or elle a évidemment $k-1$ racines positives, savoir : une comprise entre p_1 et p_2, une entre p_2 et p_3, ..., une entre p_{k-1} et p_k; et comme elle est de degré $m-1$, le théorème de Descartes s'y applique par hypothèse. On a donc

$$V-1 \geqq k-1,$$

ce qui équivaut à l'inégalité que nous voulions prouver :

$$V \geqq k.$$

Cette inégalité est donc vraie dans tous les cas.

La démonstration précédente suppose que l'équation proposée contienne un terme A_m, indépendant de x, et dont la dérivée soit égale à zéro. Il nous reste à considérer le cas où il n'en serait pas ainsi. Soit l'équation

[1] $\varphi(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_p x^{m-p} + \ldots A_q x^{m-q} = 0;$

Digitized by Google

nommons toujours k le nombre de ses racines positives $p_1, p_2, \ldots p_k$, et V le nombre de ses variations, sa dérivée

$$[2] \qquad \varphi'(x) = mx^{m-1} + (m-1)A_1x^{m-2} + \ldots + (m-p)A_px^{m-p-1} + (m-q)A_qx^{m-q-1}$$

aura, dans tous les cas, V variations : car elle a les termes de mêmes signes que ceux de [1], et aucun d'eux n'a disparu. Or cette équation $\varphi'(x) = 0$ admet évidemment k racines positives, savoir : une entre 0 et p_1 (0 est racine de la proposée) ; une entre p_1 et $p_2 \ldots$; une entre p_{k-1} et p_k ; et comme elle est de degré $m-1$, le théorème de Descartes y est, par hypothèse, applicable, et l'on a

$$V \geqq k ;$$

c'est précisément ce qu'il fallait démontrer.

La proposition est donc établie pour une équation quelconque du degré m, pourvu qu'elle soit supposée vraie pour les équations du degré $m-1$. Elle est d'ailleurs évidente pour une équation du premier degré ; donc elle est vraie pour une équation du second ; puis pour une du troisième, etc.

Limite du nombre de racines négatives.

350. Si, dans l'équation $\varphi(x) = 0$, on remplace x par $-x$, on obtient une équation nouvelle :

$$[1] \qquad \varphi(-x) = 0,$$

dans laquelle les termes de degré pair ont conservé leur signe, tandis que ceux de degré impair en ont changé. Les racines de l'équation [1] sont évidemment égales et de signes contraires à celles de la proposée : car il est évident que, si $x = \alpha$ satisfait à l'équation $\varphi(x) = 0$, on aura

$$\varphi(\alpha) = 0,$$

ce qui peut s'écrire

$$\varphi[-(-\alpha)] = 0,$$

et, par suite, $(-\alpha)$ est racine de [1].

Les racines négatives de l'équation proposée seront donc en même nombre que les racines positives de [1], et, par suite, le

Digitized by Google

nombre des variations de l'équation [1] est une limite supérieure du nombre des racines négatives de la proposée.

351. REMARQUE. Si, en appliquant les règles précédentes, on trouve que le nombre des racines positives d'une équation de degré m ne peut surpasser V, et que celui des racines négatives ne peut surpasser V', si l'on a

$$V + V' < m,$$

on en conclura évidemment que l'équation n'a pas toutes ses racines réelles.

Cette règle conduit à plusieurs théorèmes que nous supprimons ici comme complétement inutiles. L'application même de la règle, qui est très-facile dans chaque cas particulier, fournira précisément les mêmes résultats que les théorèmes que l'on peut en déduire.

RÉSUMÉ.

346. Si une fonction est croissante, sa dérivée est positive; si elle est décroissante, sa dérivée est négative. — **347.** Si $\varphi(x)$ s'annule pour $x = a$, $\varphi(a-h)$ est de signe contraire à la dérivée $\varphi'(a-h)$, et $\varphi(a+h)$ est de même signe que $\varphi'(a+h)$. — **348.** Entre deux racines réelles d'une équation se trouve toujours une racine réelle de la dérivée. — **349.** Théorème de Descartes. — **350.** Limite du nombre de racines négatives. — **351.** Cas où l'on peut affirmer qu'il y a des racines imaginaires.

EXERCICES.

I. Si on a une équation

$$x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_m = 0,$$

que l'on multiplie les termes par a, $a+b$, $a+2b$, ..., $a+mb$, a et b étant des nombres positifs quelconques, on formera une équation nouvelle qui aura nécessairement une racine comprise entre deux racines consécutives quelconques de la proposée, excepté entre la plus petite racine positive et la plus petite en valeur absolue des racines négatives. (S'il manque des termes dans l'équation, il faut les écrire en leur donnant 0 pour coefficient.)

II. Si $\varphi(x) = 0$ est une équation algébrique qui admette des racines positives et négatives, l'équation

$$k^2\varphi(x) + h^2 x\varphi'(x) = 0$$

admettra nécessairement deux racines comprises entre la plus petite racine positive et la plus grande négative de la proposée.

III. Si, dans une équation, il manque un terme entre deux de même signe, l'équation admet nécessairement des racines imaginaires. En multipliant une équation par un binome $x - a$, on peut toujours faire disparaître un terme 0. Conclure de la remarque précédente que si l'équation proposée a toutes ses racines réelles, si A, B, C, D désignent quatre coefficients consécutifs, $B^2 - AC$ et $C^2 - DB$ doivent être de mêmes signes.

CHAPITRE XXIX.

RACINES COMMENSURABLES.

---

332. On peut obtenir par des essais réguliers et fort simples les racines commensurables d'une équation à coefficients commensurables.

Nous commencerons par montrer que cette recherche se ramène à celle des racines entières, et pour cela nous établirons le théorème suivant.

THÉORÈME. *Une équation de la forme*

$$[1] \qquad x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m = 0,$$

dont le premier terme a pour coefficient l'unité, et dont les autres coefficients sont entiers, ne peut avoir de racine commensurable fractionnaire.

Si, en effet, $\frac{a}{b}$ est racine de l'équation [1], on doit avoir

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m + A_1 \left(\frac{a}{b}\right)^{m-1} + \ldots + A_m = 0;$$

d'où l'on déduit, en multipliant tous les termes par b^{m-1},

$$[1] \qquad \frac{a^m}{b} + A_1 a^{m-1} + A_2 a^{m-2} b + \ldots + A_m b^{m-1} = 0,$$

ou $$\frac{a^m}{b} = -(A_1 a^{m-1} + A_2 a^{m-2} b + \ldots + A_m b^{m-1}).$$

Si l'on suppose, ce qui évidemment est permis, que la fraction $\frac{a}{b}$ ait été réduite à sa plus simple expression, a et b sont premiers entre eux, la fraction $\frac{a^m}{b}$ est par conséquent irréductible et ne peut être égale à un nombre entier, il est donc im-

Digitized by Google

possible qu'elle soit égale au second membre, dont tous les termes sont entiers, et par conséquent il est impossible que l'équation [1] admette une racine de la forme $\frac{a}{b}$. Les seules racines commensurables qu'elle puissse avoir sont donc entières.

333. Une équation à coefficients entiers étant donnée, le théorème précédent permet de la transformer de manière que toutes les racines commensurables deviennent entières.

Soit, en effet, l'équation

$$Ax^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_{m-1}x + A_m = 0,$$

dans laquelle on peut supposer que $A, A_1, \ldots A_m$ soient des nombres entiers, car il est toujours facile de chasser les dénominateurs en multipliant tous les termes par leur plus petit multiple commun. Posons $x = \frac{y}{A}$, y étant une nouvelle inconnue qui, évidemment, devra satisfaire à l'équation

$$A\left(\frac{y}{A}\right)^m + A_1\left(\frac{y}{A}\right)^{m-1} + \ldots + A_m = 0;$$

ou, en multipliant les deux membres par A^{m-1},

$$y^m + A_1y^{m-1} + A_2Ay^{m-2} + \ldots + A_mA^{m-1} = 0,$$

équation dont les coefficients sont entiers et dont le premier terme y^m a pour coefficient l'unité; les valeurs commensurables de y sont donc toutes entières. Il est évident d'ailleurs qu'elles correspondent aux valeurs commensurables de x, car la relation $x = \frac{y}{A}$, prouve que x étant commensurable, il en est de même de y.

Si nous pouvons obtenir les racines entières de l'équation en y, d'après ce qui précède, nous aurons toutes les racines commensurables de l'équation en x.

Recherche des racines entières.

334. Nous avons vu comment la recherche des racines commensurables peut se ramener à celle des racines entières. Il

Digitized by Google

nous reste donc à montrer comment on peut obtenir les racines entières d'une équation à coefficients entiers.

Soit l'équation

$$[1] \qquad x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_m = 0,$$

et α une de ses racines entières, le premier membre doit être divisible par $x-\alpha$, représentons le quotient qui est un polynome du degré $m-1$ par

$$x^{m-1} + P_1x^{m-2} + P_2x^{m-3} + \ldots + P_{m-2}x + P_{m-1}.$$

P_1, $P_2 \ldots P_{m-1}$ étant évidemment des nombres entiers, car le premier terme du diviseur $x-\alpha$ ayant pour coefficient l'unité, la division ne peut introduire aucun dénominateur.

En écrivant que le dividende est le produit du diviseur par le quotient, on aura identiquement

$$[2] \quad (x-\alpha)(x^{m-1} + P_1x^{m-2} + \ldots + P_{m-2}x + P_{m-1}) = x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_{m-1}x + A_m.$$

En effectuant les opérations indiquées dans le premier membre, et égalant les coefficients des mêmes puissances de x, il vient

$$[3] \qquad \begin{aligned} -P_{m-1}\alpha &= A_m, \\ P_{m-1} - P_{m-2}\alpha &= A_{m-1}, \\ P_{m-2} - P_{m-3}\alpha &= A_{m-2}, \\ &\vdots \\ P_2 - P_1\alpha &= A_2, \\ P_1 - \alpha &= A_1. \end{aligned}$$

Tous les nombres qui figurent dans ces formules étant entiers, la première équation prouve que α doit être un des diviseurs de A_m, et que le quotient $\frac{A_m}{\alpha}$ est égal à $-P_{m-1}$.

La seconde équation peut s'écrire

$$-P_{m-2}\alpha = A_{m-1} - P_{m-1} = A_{m-1} + \frac{A_m}{\alpha};$$

elle prouve que α doit être un diviseur de la somme $A_{m-1} + \frac{A_m}{\alpha}$ et que le quotient $\dfrac{A_{m-1} + \frac{A_m}{\alpha}}{\alpha}$ est $-P_{m-2}$.

La troisième équation peut s'écrire

$$-P_{m-3}\alpha = A_{m-2} - P_{m-2} = A_{m-2} + \frac{A_{m-1} + \frac{A_m}{\alpha}}{\alpha}.$$

Elle prouve que α doit être un diviseur de la somme $A_{m-2} + \dfrac{A_{m-1} + \frac{A_m}{\alpha}}{\alpha}$, c'est-à-dire de la somme obtenue en ajoutant A_{m-2} au quotient précédent, et que le quotient est $-P_{m-3}$.

On peut continuer ainsi jusqu'à la dernière équation, qui prouvera que le dernier quotient $-P_1$, augmenté de A_1 doit être divisible par α et donner pour quotient -1.

Ces conditions sont nécessaires et suffisantes pour que α soit racine ; car si elles sont remplies, on pourra trouver des nombres $P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}$, qui rendent identiques les équations [3], et, par suite, le premier membre de la proposée sera divisible par $x-\alpha$.

On peut remarquer que les opérations à l'aide desquelles on s'assure qu'un nombre α est racine, font connaître les coefficients du quotient de la division du premier membre par $x-\alpha$. Ces coefficients P_m, P_{m-1}, ... sont égaux, en effet, aux quotients changés de signes des différentes divisions dont la réussite est nécessaire pour que le nombre α ne soit pas rejeté.

En résumé, pour trouver les racines commensurables d'une équation telle que [1], on cherchera d'abord les diviseurs entiers, positifs ou négatifs, du dernier terme : eux seuls peuvent être racines. Pour essayer l'un de ces diviseurs α, on divisera le dernier terme A_m par α, et l'on ajoutera au quotient le coefficient A_{m-1} : la somme devra être divisible par α. On formera le quotient ; on y ajoutera A_{m-2} : la somme devra encore être divisible par α ; et en continuant ainsi, on devra trouver un dernier quotient qui, ajouté au coefficient du second terme, donne pour somme $-\alpha$.

355. On peut diminuer le nombre des essais à faire par la remarque suivante :

Si α est une racine de l'équation

[1] $$x^m + A_1x^{m-1} + \ldots A_m = 0,$$

le premier membre de cette équation est divisible par $x - \alpha$, et

Digitized by Google

les coefficients du quotient sont tous entiers, ainsi qu'on l'a exposé plus haut. Si donc on attribue à x une valeur entière quelconque, la valeur numérique du premier membre de [1] sera divisible par la valeur numérique de $x - \alpha$. Les valeurs les plus simples que l'on puisse attribuer à x sont 1 et -1. En nommant Q et Q_1 les valeurs correspondantes du premier membre de [1], on ne devra essayer α que si Q est divisible par $1 - \alpha$, et Q_1 par $-1 - \alpha$ ou, en changeant le signe, par $1 + \alpha$.

Application de la méthode précédente.

356. Voici la manière la plus avantageuse de disposer les calculs :

$$\begin{array}{ccccc|l} A_1, & A_2, & \ldots\ A_{m-2}, & A_{m-1}, & A_m & \\ \hline & P_1, & \ldots\ P_{m-3}, & P_{m-2}, & P_{m-1} & \alpha. \end{array}$$

J'écris sur une ligne horizontale les coefficients de l'équation proposée, et dans une colonne, à droite, le diviseur à essayer α. Sur la même ligne que α, et en allant de droite à gauche, j'écris au-dessous de A_m, A_{m-1} ..., les quotients *changés de signe* P_{m-1}, P_{m-2}..., calculés comme il a été dit (354). Si tous ces quotients sont entiers, et si, en outre, le nombre écrit sous A_1 est $+1$, α est racine, et P_1, P_2 ..., P_{m-1} sont les coefficients de l'équation débarrassée de la racine α. Il n'y aura donc plus alors qu'à opérer sur cette seconde ligne comme sur la première. Si quelques-unes des divisions ne peuvent se faire, on passera à un autre diviseur.

Exemple. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 19x^2 + 68x - 60$.

$$\begin{array}{ccccc|l} -2, & -19, & +68, & -60 & & \\ \hline 1, & 0, & -19, & +30 & & 2 \text{ racine} \\ \hline & 1, & 2, & -15 & & 2 \text{ racine} \\ \hline & & 1, & +5 & & 3 \text{ racine} \\ \hline & & & +1 & & -5 \end{array}$$

60 admet 24 diviseurs; mais la marche même du calcul en exclut un grand nombre.

Je commence par essayer $+1$ et -1, en les substituant directement à la place de x : aucun d'eux n'est racine; mais ce premier calcul m'apprend que $f(1) = -12$ et que $f(-1) = -144$. Dès lors je ne dois, parmi les diviseurs positifs, essayer que ceux qui diminués de 1 divisent 12, et qui augmentés de 1 divisent 144 ; et parmi les diviseurs négatifs, ceux dont la valeur absolue, augmentée de 1 divise 12, et diminuée de 1 divise 144.

Le diviseur 2 satisfaisant à ces conditions, je l'essaye : je trouve que 2 est racine, et que l'équation, débarrassée de cette racine, est

$$x^3 + 19x + 30 = 0.$$

Comme 2 divise 30, je l'essaye de nouveau, et je continue de la même manière, en n'opérant que sur les diviseurs qui satisfont aux conditions précédentes, et qui en outre divisent le terme tout connu de la dernière équation simplifiée.

Tout calcul fait, on trouve que l'équation proposée a pour racines 2, 2, 3, -5, et que son premier membre est égal à

$$(x-2)^2(x-3)(x+5).$$

RÉSUMÉ.

352. Si le premier terme d'une équation a pour coefficient l'unité, et que les autres coefficients soient entiers, les racines commensurables sont toutes entières. — **353.** Le théorème précédent permet de transformer une équation à coefficients rationnels en une autre dont les racines soient entières. — **354.** Recherche des racines entières. — **355.** Théorème qui permet de diminuer le nombre des essais. — **356.** Application de la méthode à un exemple.

EXERCICES.

I. Chercher les racines commensurables d'une équation sans les ramener préalablement à être entières. Montrer qu'en désignant par $\frac{a}{b}$ une pareille racine réduite à sa plus simple expression, a doit être diviseur du dernier terme, et b diviseur du coefficient du premier terme. Chercher par quels essais analogues à ceux qui ont été indiqués pour les racines entières, on peut vérifier que $\frac{a}{b}$ est racine.

Digitized by Google

II. Chercher si l'équation

$$x^3 - (a + b + ab)x^2 + ab(a + b + 1)x - ab^2 - a^2b = 0$$

admet des racines exprimées rationnellement en a et b.

III. Si une équation du troisième degré n'admet pas de racines commensurables, elle n'admet pas de racines multiples.

IV. Le théorème précédent s'applique à une équation du cinquième degré, et ne s'applique pas à une équation du quatrième.

Digitized by

CHAPITRE XXX.

NOTIONS SUR LA THÉORIE DES DIFFÉRENCES.

---

357. Si l'on considère une suite de nombres qui se succèdent suivant une loi quelconque, les différences obtenues en retranchant chacun d'eux de celui qui le suit, forment une nouvelle suite dont les termes se nomment les *différences* des termes de la première.

Ainsi, la suite proposée étant représentée par

$$[1] \qquad y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3 \ldots y_{n-1},\ y_n;$$

la suite des différences sera

$$[2] \qquad y_1 - y_0,\ y_2 - y_1,\ y_3 - y_2 \ldots y_n - y_{n-1};$$

$y_1 - y_0$ est la *différence* de y_0, $y_2 - y_1$, la différence de y_1, $y_n - y_{n-1}$ la différence de y_{n-1}. Pour former la différence de y_n il faudrait connaître un terme de plus dans la suite [1].

Pour désigner les différences on se sert souvent du signe Δ.

Ainsi, Δy_k désigne la différence $y_{k+1} - y_k$. D'après cette notation les termes de la suite

$$y_0,\ y_1,\ y_2 \ldots y_n$$

auront pour différences

$$\Delta y_0,\ \Delta y_1,\ \Delta y_2 \ldots \Delta y_{n-1}.$$

358. Une suite quelconque de nombres étant donnée, leurs différences forment une nouvelle suite ayant un terme de moins que la première. L'on peut opérer sur cette suite comme sur celle qui lui a donné naissance et former des différences des différences, que l'on nomme des différences secondes. On les désigne par le signe Δ^2.

Ainsi, étant donnée la suite

$$y_0,\ y_1,\ y_2 \ldots y_n,$$

Digitized by Google

les différences premières seront désignées par

$$\Delta y_0,\ \Delta y_1,\ \Delta y_2 \ldots \Delta y_{n-1},$$

et les différences secondes

$$\Delta y_1 - \Delta y_0,\ \Delta y_2 - \Delta y_1 \ldots,\ \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2},$$

le seront par $\Delta^2 y_0,\ \Delta^2 y_1,\ \ldots\ \Delta^2 y_{n-2}.$

Cette nouvelle série ayant évidemment un terme de moins que la précédente, et, par suite, deux termes de moins que la proposée.

359. Si l'on opère sur la suite des différences secondes comme on l'a fait sur la suite proposée, on formera les différences des différences secondes que l'on nomme des différences troisièmes et que l'on désigne par le signe Δ^3.

Ainsi, les différences

$$\Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0,\ \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 \ldots \Delta^2 y_{n-2} - \Delta^2 y_{n-3}$$

se désignent par $\Delta^3 y_0,\ \Delta^3 y_1 \ldots \Delta^3 y_{n-3}.$

On conçoit que l'on peut continuer ainsi indéfiniment et former les différences quatrièmes, cinquièmes, etc., qui se désigneront par les signes Δ^4, Δ^5... le nombre de ces différences n'étant limité que par celui des termes de la suite proposée. Ainsi, deux termes ne donnent lieu qu'à une différence première, et il n'y a pas lieu de considérer leur différence seconde. Trois termes donnent lieu à deux différences premières et à une différence seconde, il n'y a pas lieu de considérer leur différence troisième. En général, m termes donnent lieu à $m-1$ différences premières, à $m-2$ différences secondes... à une différence $m-1^{me}$, il n'y a pas lieu de considérer leur différence m^{me}. Si une suite est illimitée on peut considérer des différences d'un ordre illimité.

Usage des différences pour la formation des carrés et des cubes.

360. Nous commencerons par montrer par deux exemples simples de quelle utilité peut être la considération des différences.

Considérons la suite des carrés des nombres naturels :

[1] 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 ...,

les différences premières sont :

[2] 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 ...,

et les différences secondes

[3] 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2 ...,

sont toutes égales entre elles. La démonstration de ce fait est tellement simple que nous croyons pouvoir nous dispenser de la donner ici.

D'après cette remarque, si l'on voulait former la table des carrés des nombres naturels on commencerait par écrire la suite [2].

[2] 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15.....

puis le premier terme de la suite des carrés, qui est 1, et il est évident que chaque carré s'obtiendrait du précédent en ajoutant le terme correspondant de cette suite [2].

Ainsi, on dirait 3 et 1, 4. 4 et 5, 9. 9 et 7, 16, etc.

361. Si nous considérons la suite des cubes

[1] 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729,

les différences premières sont :

[2] 7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, 217,

les différences secondes :

[3] 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48,

et les différences troisièmes

[4] 6, 6, 6, 6, 6, 6,

sont constantes et égales à 6. Cette loi est générale. En effet, quatre cubes consécutifs sont

$$a^3,\ (a+1)^3,\ (a+2)^3,\ (a+3)^3,$$

les différences premières sont

$$3a^2+3a+1,\quad 3(a+1)^2+3(a+1)+1,\quad 3(a+2)^2+3(a+2)+1,$$

et les différences secondes

$$3[(a+1)^2-a^2]+3,\quad 3[(a+2)^2-a^2]+3,$$

Digitized by Google

c'est-à-dire en réduisant

$$6a+6, \quad 6(a+1)+6,$$

et la différence de ces deux expressions, c'est-à-dire la différence troisième, est évidemment 6...

D'après cela, pour former un tableau des cubes, on formerait successivement les suites [4] [3] [2] [1], chacune permettant d'obtenir la suivante par de simples additions. Ainsi, ayant écrit la suite [3] sur une ligne verticale, on obtiendra la suite [2] en écrivant son premier terme 7, et remarquant que chacun des autres se forme du précédent par l'addition du terme correspondant de la suite [3]

12	7
18	19 = 12 + 7
24	37 = 18 + 19
30	61 = 24 + 37
36	91 = 30 + 61
42	127 = 36 + 91
48	etc...
54	
60	
66	
72	
78	

Ayant ainsi formé la suite [2], c'est-à-dire les différences premières des cubes, chaque cube pourra se déduire du précédent en lui ajoutant la différence correspondante, en sorte qu'ils se déduiront tous du premier 1, par de simples additions.

Ainsi, ayant écrit sur une ligne verticale les différences premières obtenues plus haut, on formera la série des cubes comme l'indique le tableau suivant.

7	1
19	8 = 7 + 1
37	27 = 19 + 8
61	64 = 37 + 27
91	125 = 61 + 64
127	216 = 91 + 125
etc.	etc.

Le tableau suivant résume les résultats que nous venons d'obtenir.

CUBES.	DIFFÉRENCES 1res.	DIFFÉRENCES 2mes.	DIFFÉRENCES 3mes.
1	7	12	6
8	19	18	6
27	37	24	6
64	61	30	6
125	91	36	
216	127		
343			

Il est clair que, dans la formation de ce tableau, on devra commencer par écrire la colonne de droite, pour en déduire les suivantes, au moyen de leurs premiers termes, par de simples additions.

Différences des polynomes.

362. Nous avons reconnu (360) que la suite des carrés des nombres naturels a ses différences secondes, et la suite des cubes ses différences troisièmes égales à une constante. Cette proposition s'étend aux différences quatrièmes de la suite des quatrièmes puissances, aux différences cinquièmes de la suite des cinquièmes puissances, etc. Mais, sans nous arrêter à ces propositions, nous démontrerons le théorème suivant, dont elles sont évidemment des cas particuliers.

THÉORÈME. *Si, dans un polynome en* x, *de degré* m, *on substitue une suite de nombres en progression arithmétique, les différences* mmes *des résultats obtenus sont constantes.*

Soit, en effet, le polynome

[1] $y = F(x) = Ax^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_{m-1}x + A_m.$

Supposons que l'on substitue à x les valeurs successives

$$x_0,\ x_0+h,\ x_0+2h,\ \ldots,\ x_0+nh\ldots;$$

désignons par $y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n\ldots$

les valeurs correspondantes de y. Toutes ces valeurs sont évidemment des polynomes de degré m en x_0, dont les coefficients dépendent de h. De plus, il est clair que, pour passer de l'une

d'elles à la suivante, il suffit d'y changer x_0 en x_0+h. On a en effet, en considérant deux valeurs consécutives de y, y_p et y_{p+1},

$$y_p = F(x_0+ph),$$
$$y_{p+1} = F[x_0+(p+1)h].$$

Or, il est évident que $x_0+(p+1)h$ peut se déduire de x_0+ph en y changeant x_0 en x_0+h.

Cela posé, les différences premières

$$\Delta y_0, \ \Delta y_1, \ \Delta y_2 \ldots$$

sont des polynomes du degré $(m-1)$ en x_0, dont les coefficients dépendent de h. On a, en effet,

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = F(x_0+h) - F(x_0) = F'(x_0)h + F''(x_0)\frac{h^2}{1.2} + \ldots$$

Or on sait que $F'(x_0)$ est un polynome de degré $(m-1)$, $F''(x_0)$ un polynome de degré $(m-2)$, etc.; la proposition est donc démontrée pour Δy_0. Il en résulte qu'elle est vraie pour les différences suivantes, Δy_1, Δy_2, ... : car chacune d'elles se déduit évidemment de la précédente en changeant x_0 en x_0+h, ce qui ne change pas son degré par rapport à x_0.

La série

[2] $$\Delta y_0, \ \Delta y_1, \ \ldots, \ \Delta y_n \ldots$$

pourrait donc s'obtenir en substituant successivement à x, dans un certain polynome de degré $(m-1)$, les valeurs x_0, x_0+h...,

Si donc nous appliquons à cette suite ce qui a été dit de la suite

$$y_0, \ y_1, \ \ldots, \ y_n$$

déduite de la même manière d'un polynome de degré m, nous verrons que les différences des termes de la série [2], c'est-à-dire

[3] $$\Delta^2 y_0, \ \Delta^2 y_1, \ \ldots, \ \Delta^2 y_n;$$

sont des polynomes de degré $(m-2)$ en x_0, et que chacun se déduit du précédent en y changeant x_0 en x_0+h; en sorte qu'ils peuvent tous se déduire d'un même polynome en y changeant x en x_0, x_0+h, x_0+2h, ...

Si nous appliquons à la suite des différences secondes le théorème dont nous avons déjà deux fois fait usage, nous verrons

Digitized by Google

que les différences des termes de la série [3], c'est-à-dire

[4] $$\Delta^3 y_0,\ \Delta^3 y_1,\ \ldots,\ \Delta^3 y_n$$

sont des polynomes de degré $(m-3)$ en x_0.

Et en continuant de la même manière, nous verrons que les différences quatrièmes sont des polynomes de degré $m-4$, les différences cinquièmes de degré $m-5$,... et enfin les différences m^{mes} de degré 0, c'est-à-dire indépendantes de x_0, ce qui prouve le théorème énoncé : car pour obtenir chacune de ces différences, on doit changer, dans la précédente, x_0 en x_0+h, et elles sont, par conséquent, constantes quand elles ne contiennent pas x_0.

363. En revenant sur les détails de la démonstration précédente, on peut faire plusieurs remarques utiles.

Remarque I. On a trouvé la formule

[1] $$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = \mathrm{F}(x_0+h) - \mathrm{F}(x_0) = \mathrm{F}'(x_0)h + \mathrm{F}''(x_0)\frac{h^2}{1.2} + \ldots + \frac{F^m(x_0)\,h^n}{1.2.m}.$$

On voit que l'accroissement h est facteur dans le second membre, et qu'il le sera encore si l'on remplace x par x_0+h, x_0+2h, pour former les différences

$$\Delta y_1,\ \Delta y_2,\ \ldots$$

en sorte que toutes les différences premières contiennent en facteur l'accroissement h.

Remarque II. Il est évident que si le polynome proposé renfermait h en facteur, ce facteur se retrouverait dans les dérivées successives $\mathrm{F}'(x_0)$, $\mathrm{F}''(x_0) \ldots \mathrm{F}^m(x_0)$, et, par suite, tous les termes de la différence contiendraient, non plus seulement h, mais h^2 en facteur. Il résulte de là que la différence première étant un polynome qui contient h en facteur, la différence seconde contiendra h^2 en facteur à tous les termes. La formule [1] prouve, en général, que si un polynome $\mathrm{F}(x)$ contient en facteur une puissance h^p de h, sa différence contiendra à tous les termes le facteur h^{p+1}, et il résulte de là que les différences des différences secondes, c'est-à-dire les différences troisièmes, contiendront le facteur h^3, les différences quatrièmes le facteur h^4 et ainsi de suite.

On voit que si l'accroissement h décroît de plus en plus, les différences décroîtront suivant une loi d'autant plus rapide que leur ordre sera plus élevé.

REMARQUE III. L'expression générale de Δy_0

$$\Delta y_0 = F'(x_0)\, h + F''(x_0)\, \frac{h^2}{1\,.\,2} + \ldots,$$

est, comme nous l'avons dit, un polynome que l'on peut ordonner suivant les puissances de x_0. Si Ax^m réprésente le premier terme de $F(x)$, il est facile de voir que le premier terme de Δy_0 sera $mAx_0^{m-1}h$, et que, par suite, Δy_0, Δy_1, $\Delta y_2 \ldots$, s'obtiendront en substituant à x les valeurs x_0, $x_0 + h$, $x_0 + 2h \ldots$, dans un polynome dont le premier terme est $mhAx^{m-1}$. En appliquant à ce polynome le résultat trouvé pour $F(x)$, on verra que les différences premières de ce polynome, c'est-à-dire les différences secondes de $F(x)$ peuvent s'obtenir en substituant à x les valeurs $x_0, x_0 + h \ldots$, dans un polynome dont le premier terme est $m(m-1)Ah^2x^{m-2}$. On verra de même que le premier terme du polynome qui donnerait les différences troisièmes est $m(m-1)(m-2)h^3x^{m-3}$. Enfin, la différence m^{me} qui se réduit à un seul terme puisqu'elle est indépendante de x_0, est

$$m(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\,\ldots\, h^m.$$

Application à un exemple.

364. Si nous considérons le polynome du troisième degré

[1] $$y = x^3 + px^2 + qx + p,$$

on trouvera sans peine

[2] $$\Delta y = 3x^2h + (3h^2 + 2ph)\, x + h^3 + ph^2 + qh,$$

[3] $$\Delta^2 y = 6xh^2 + 6h^3 + 2ph^2,$$

[4] $$\Delta^3 y = 6h^3,$$

et pour obtenir les valeurs de Δy_0, Δy_1, $\Delta y_2 \ldots \Delta^2 y_0$, $\Delta^2 y_1 \ldots$ il suffira de remplacer dans le second membre des formules [2] et [3] x par x_0, $x_0 + h$, etc.

Si l'on voulait former les valeurs numériques de la fonction y et de ses différences, il faudrait procéder comme on l'a indiqué pour former le tableau des cubes.

Prenons pour exemple

$$y = x^3 - 5x^2 + 6x - 1,$$

et formons les valeurs que prend ce polynome pour des valeurs entières de la variable. Si l'on fait successivement $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, on trouve pour valeurs correspondantes de y, $y = -13$, $y = -1$, $y = 1$, dont les différences sont 12 et 2, la différence seconde est -10. Quant à la différence troisième de y, on sait qu'elle est égale à 6. On disposera ces résultats de la manière suivante :

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
				6
				6
-1	-13	12	-10	6
0	-1	2		6
$+1$	$+1$			6
				6

et l'on remplira ensuite les différentes colonnes en remarquant que chaque terme de l'une d'elles (la première colonne exceptée) est égal à celui qui est au-dessus, augmenté du terme correspondant à ce dernier dans la colonne placée à sa droite. Cette remarque permet évidemment de prolonger les colonnes dans les deux sens, on trouve ainsi

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
-5	-281	112	-34	6
-4	-169	78	-28	6
-3	-91	50	-22	6
-2	-41	28	-16	6
-1	-13	12	-10	6
0	-1	2	-4	6
1	$+1$	-2	$+2$	6
2	-1	0	$+8$	6
3	-1	8	$+14$	
4	$+7$	22		
5	$+29$			

REMARQUE. On voit, par l'exemple précédent, que, pour calculer les valeurs d'un polynome du troisième degré qui correspondent à des valeurs entières de la variable, il suffit de

Digitized by Google

connaître celles qui correspondent à trois nombres entiers consécutifs $-1, 0, +1$; en se fondant sur ce que la différence troisième est constante, il est très-facile d'obtenir, par de simples additions, les valeurs suivantes.

Si le polynome proposé était du quatrième degré, la différence quatrième serait constante, et pour former la série de ses valeurs, il suffirait de connaître quatre valeurs consécutives. Il en faudrait cinq pour un polynome du cinquième degré, et ainsi de suite.

Sur la manière de former les tables numériques.

363. La considération des différences est fort utile dans la construction des tables de toute espèce. Il arrive, en effet, presque toujours que, dans une série de nombres résultant d'une loi régulière et suffisamment rapprochés les uns des autres, les différences tendent de plus en plus vers l'égalité, à mesure que leur ordre s'élève. En négligeant des quantités fort petites, on pourra, à partir d'un certain ordre, leur supposer, dans un certain intervalle, une valeur invariable, et construire la table comme s'il s'agissait des valeurs d'un polynome.

Ne pouvant donner ici la raison de ce fait général, nous nous bornerons à le développer dans le cas des tables de logarithmes.

Si l'on pose $$y = \log x,$$

on aura
$$\Delta y = \log(x+h) - \log(x) = \log\left(1+\frac{h}{x}\right)$$
$$= \log e\left(\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3}\cdots\right),$$
$$\Delta^2 y = [\log(x+2h) - \log(x+h)] - [\log(x+h) - \log x]$$
$$= \log(x+2h) - 2\log(x+h) + \log x$$
$$= \log\left(1+\frac{2h}{x}\right) - 2\log\left(1+\frac{h}{x}\right)$$
$$= -\log e\left(\frac{h^2}{x^2} - \frac{2h^3}{x^3} + \ldots\right)$$
$$\Delta^3 y = [\log(x+3h) - 2\log(x+2h) + \log(x+h)]$$
$$- [\log(x+2h) - 2\log(x+h) - \log x]$$
$$= \log(x+3h) - 3\log(x+2h) + 3\log(x+h) - \log x$$
$$= \log\left(1+\frac{3h}{x}\right) - 3\log\left(1+\frac{2h}{x}\right) + 3\log\left(1+\frac{h}{x}\right)$$
$$= \log e\left(\frac{2h^3}{x^3} - \text{etc.}\right).$$

Si l'on suppose, par exemple, $x=10000$ et $h=1$, il viendrait

$$\Delta y = 0,000043427276863,$$
$$\Delta^2 y = 0,000000004342076,$$
$$\Delta^3 y = 0,000000000000868,$$

et si l'on ne voulait avoir les résultats qu'avec dix chiffres décimaux, on pourrait négliger longtemps les différences du quatrième ordre, et procéder comme si la différence troisième était constante. On formera donc successivement les colonnes des différences troisièmes, secondes, premières, comme au n° 363, d'où l'on déduira les logarithmes des nombres 10001, 10002, 10003, en partant de celui de 10000, qui est 4,000000000000000. Il faudra vérifier les résultats au moyen de logarithmes obtenus directement à des intervalles éloignés. La méthode des différences devra les donner exacts avec le nombre des chiffres que l'on veut conserver. Lorsque le dernier de ces chiffres cessera d'être exact, on calculera de nouveau *à priori*, au moyen des formules (365), les différences Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, et l'on se servira de ces nouvelles valeurs comme des précédentes.

Sommation des suites.

366. Lorsque deux séries de nombres ont les mêmes différences, la différence des termes qui se correspondent dans l'une et dans l'autre est évidemment constante.

Cette remarque conduit, comme nous allons le montrer, à des conséquences importantes.

Considérons la somme

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1}$$

comme étant le terme de rang $n-1$ dans la suite

$$u_1,\ u_1+u_2,\ u_1+u_2+u_3,\ u_1+u_2+u_3+u_4,\ \ldots,\ u_1+u_2+u_3+\ldots+u_{n-1},$$

les différences de cette suite sont évidemment

$$u_2,\ u_3,\ \ldots\ u_{n-1}.$$

Si donc, par un moyen quelconque, nous trouvons une autre suite dont les différences soient égales à ces quantités données, son terme de rang n représentera, *à une constante près*, la

somme $u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$. Nous allons appliquer ce procédé à la sommation de quelques suites.

Pour plus de simplicité, nous désignerons, dans ce qui va suivre, par Σu, toute fonction dont la différence est égale à u. Ainsi en désignant une fonction de x par $\varphi(x)$, l'égalité

$$[1] \qquad \Sigma\varphi(x) = F(x),$$

exprimera

$$[2] \qquad \begin{cases} F(x+h) - F(x) = \varphi(x), \\ F(x+2h) - F(x+h) = \varphi(x+h), \\ \vdots \\ F(x+nh) - F[x+(n-1)h] = \varphi[x+(n-1)h]. \end{cases}$$

Toutes ces équations [2] résultent, d'ailleurs, de la première, si l'on suppose que celle-ci ait lieu pour une valeur quelconque de x. Il suffit, en effet, d'y changer x en $x+h$, $x+2h$, ..., pour obtenir les suivantes. L'accroissement h, attribué à x, est un nombre fixe dont on doit, dans chaque question, assigner la valeur : nous le prendrons, dans les paragraphes suivants, égal à l'unité.

Sommes des puissances m^{mes} des nombres.

367. Si, dans la formule

$$F(x+h) - F(x) = F'(x)h + F''(x)\frac{h^2}{1.2} + \dots,$$

on fait $F(x) = x^{m+1}$ et $h = 1$, on aura

$$(x+1)^{m+1} - x^{m+1} = (m+1)x^m + \frac{(m+1)m}{2}x^{m-1}$$
$$+ \frac{(m+1)m \,.\, m-1}{1\,.\,2\,.\,3}x^{m-2} + \dots.$$

Les deux membres de cette formule étant égaux, les fonctions de x dont ils expriment les différences, ne peuvent différer que par une constante, et comme le premier est la différence de x^{m+1}, on a, d'après notre notation,

$$[1] \qquad x^{m+1} = (m+1)\Sigma x^m + \frac{(m+1)m}{2}\Sigma x^{m-1}$$
$$+ \frac{(m+1)m\,.(m-1)}{1\,.\,2\,.\,3}\Sigma x^{m-2} + \dots + const.$$

Cette équation permettra de calculer Σx^m, si l'on connait

$$\Sigma x^{m-1}, \ \Sigma x^{m-2}, \dots \Sigma x, \ \Sigma 1.$$

or, on a évidemment $\quad \Sigma 1 = x + C,$

C désignant une constante. D'après cela, la formule [1] donnera, en y faisant successivement $m = 1, 2, 3\ldots$,

$$\Sigma x = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + C;$$

$$\Sigma x^2 = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x}{6} + C,$$

$$\Sigma x^3 = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2}x^3 + \frac{x^2}{4} + C,$$

$$\Sigma x^4 = \frac{x^5}{5} - \frac{1}{2}x^4 + \frac{x^3}{3} - \frac{x}{30} + C.$$

$$\vdots$$

On conclut de là (366)

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (x-1) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + C',$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (x-1)^2 = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x}{6} + C'',$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (x-1)^3 = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2}x^3 + \frac{x^2}{4} + C''',$$

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + (x-1)^4 = \frac{x^5}{5} - \frac{1}{2}x^4 + \frac{x^3}{3} - \frac{x}{30} + C^{\text{IV}}.$$

Pour déterminer les constantes qui figurent dans les seconds membres de ces formules, remarquons qu'ils doivent tous se réduire à 1, si l'on fait $x = 2$, on trouve ainsi

$$C' = 0,$$
$$C'' = 0,$$
$$C''' = 0,$$
$$C^{\text{IV}} = 0;$$

et

$$[2]\quad 1 + 2 + 3 + \ldots + x - 1 = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} = \frac{x\,.\,(x-1)}{2},$$

$$[3]\quad 1^2 + 2^2 + \ldots + (x-1)^2 = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} = \frac{(x-1).x.(2x-1)}{6},$$

$$[4]\quad 1^3 + 2^3 + \ldots + (x-1)^3 = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4} = \frac{x^2\,.\,(x-1)^2}{4},$$

$$[5]\quad 1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + (x-1)^4 = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x}{30}.$$

$$= \frac{(x-1)x(2x-1)(3x^2 - 3x - 1)}{30}.$$

Sommation d'une série de produits.

368. Considérons le produit de n facteurs,

$$y_x = x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1).$$

Si l'on augmente x d'une unité, ce produit devient

$$y_{x+1} = (x+1)(x+2)\ldots(x+n);$$

de sorte que l'on a

$$\Delta y_x = y_{x+1} - y_x = (x+1)(x+2)\ldots(x+n) - x(x+1)\ldots(x+n-1)$$
$$= (n)(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1).$$

On en conclut d'après la notation adoptée (366)

$$y_x = \Sigma(n)(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1),$$

et par suite (n) étant une constante, on a évidemment

$$\frac{y_x}{n} = \Sigma(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1);$$

d'où l'on conclut (366)

$$\frac{y_x}{n} + C = \frac{x.(x+1)\ldots(x+n-1)}{n} + C = 1.2\ldots n-1 + 2.3\ldots n$$
$$+ 3.4\ldots n+1 + x.(x+1)\ldots(x+n-2).$$

Pour déterminer C, nous remarquerons que, pour $x=1$, le second membre se réduit à $1.2\ldots n-1$, et que le premier se réduit à $1.2\ldots n-1 + C$. On a donc

$$C = 0,$$

et, par suite,

$$1.2\ldots n-1 + 2.3\ldots n + 3.4\ldots n+1 + \ldots + (x)(x+1)\ldots(x+n-2)$$
$$= \frac{x.(x+1)\ldots(x+n-1)}{n}.$$

Si, dans cette formule, nous supposons successivement $n=2$, $n=3$, $n=4$, il vient

[1] $$1+2+3+4+\ldots+x = \frac{x(x+1)}{2},$$

[2] $$1.2+2.3+3.4+\ldots+x.(x+1) = \frac{x.(x+1)(x+2)}{3}.$$

[3] $$1.2.3+2.3.4+3.4.5+\ldots+x.(x+1)(x+2) = \frac{x.(x+1)(x+2)(x+3)}{4}.$$

⋮

Digitized by Google

Formules pour les piles de boulets.

369. Pile triangulaire. Pour former une pile de boulets triangulaire, on dispose sur le sol une série de boulets dont les centres soient en ligne droite, à côté de cette rangée on en place une seconde contenant un boulet de moins, puis une troisième contenant un boulet de moins que la seconde, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à un seul boulet qui forme le sommet du triangle.

On obtient de cette manière une tranche triangulaire formant la base de la pile. Sur cette tranche on en place une autre dont le côté contient un boulet de moins que celui de la seconde, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à une tranche composée d'un seul boulet formant le sommet de la pyramide.

Si n désigne le nombre de boulets contenus dans le côté de l'une des tranches, il y aura, dans cette tranche, un nombre de boulets égal à

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n.\overline{n+1}}{2}.$$

Si donc n désigne le nombre de boulets contenus dans le côté de la base, le nombre total des boulets de la pile sera

$$\frac{1.2}{1.2}+\frac{2.3}{1.2}+\frac{3.4}{1.2}+\ldots+\frac{n.\overline{n+1}}{1.2},$$

ce qui, d'après la formule [2] du paragraphe précédent, est égal à

$$\frac{n.(n+1)(n+2)}{2.3}.$$

370. Pile quadrangulaire. La base d'une pile quadrangulaire est formée de rangées juxtaposées contenant chacune autant de boulets qu'il y a de rangées, et présentant par conséquent, dans leur ensemble, l'aspect d'un carré. Sur cette base on place une seconde tranche dont le côté contient un boulet de moins que celui de la première, puis une troisième dont le côté contient un boulet de moins que celui de la seconde, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à une tranche composée d'un seul boulet.

Si le côté d'une tranche contient m boulets, la tranche en contient m^2; si donc on nomme n le nombre de boulets conte-

Digitized by Google

nus dans un côté de la base, le nombre total des boulets de la pile est

$$1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2,$$

ce qui (367) formule [3] est égal à

$$\frac{n.(n+1)(2n+1)}{6}.$$

371. Piles rectangulaires. La base d'une pile rectangulaire se compose d'une série de piles parallèles contenant toutes le même nombre de boulets et présentant l'aspect d'un rectangle. La tranche suivante contient un boulet de moins sur chacun de ses côtés, la troisième un boulet de moins que la seconde, et ainsi de suite, en sorte que la tranche supérieure est une simple rangée de boulets.

Soient n et n' les nombres de boulets contenus dans le petit et le grand côté de la base. Une tranche dont le petit côté contient m boulets, en contiendra dans son grand côté $n' - n + m$, et par suite il y aura, dans cette tranche, un nombre de boulets égal à

$$m(n' - n + m) = (n' - n)m + m^2.$$

Pour avoir le nombre total N, des boulets de la pile, il faut donner à m les valeurs 0, 1, 2 ... n, et l'on aura

$$N = (n' - n)(1 + 2 \dots + n) + (1^2 + 2^2 + \dots + n^2);$$

ou

$$N = \frac{(n'-n)n.(n+1)}{2} + \frac{n.(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n.(n+1)(3n'-n+1)}{6}.$$

Interpolation.

372. L'interpolation consiste à insérer, entre les termes d'une suite, de nouveaux termes assujettis à la même loi. Ce problème est quelquefois très-facile lorsque la loi des termes de la suite est connue. C'est ainsi qu'entre deux termes d'une progression on peut insérer, par un procédé fort simple, un nombre donné de moyens. Si l'on considère, au contraire, des nombres quelconques dont la loi soit inconnue, le problème de l'interpolation devient complétement indéterminé, et pour le

Digitized by Google

résoudre il faut imposer aux termes inconnus une condition qui fasse disparaître l'indétermination. Cette condition est le plus souvent que *les différences d'un certain ordre soient égales à zéro.* On en voit un exemple dans la détermination du logarithme d'un nombre non compris dans la table. Admettre, en effet, que l'accroissement des logarithmes soit proportionnel à celui des nombres, c'est admettre que, pour des accroissements égaux des nombres, les accroissements des logarithmes soient aussi égaux, ou, en d'autres termes, que la différence première des logarithmes soit constante, et que, par suite, la différence seconde soit nulle. Dans le cas des logarithmes, les tables permettent d'ailleurs de vérifier qu'il en est très-sensiblement ainsi pour des accroissements de la variable égaux à l'unité, et l'on conçoit facilement qu'il doit, *à fortiori*, en être de même pour des accroissements plus petits. Nous avons, d'ailleurs, montré (365) que les différences secondes des logarithmes diminuent rapidement; cette loi s'applique, du reste, à toutes les fonctions : lorsque la variable croît par degrés égaux de plus en plus petits, les différences de la fonction diminuent d'autant plus rapidement que leur ordre est plus élevé. Lors donc que, dans la construction d'une table, on apercevra que les différences d'un certain ordre deviennent sensiblement nulles, on pourra admettre qu'il en serait *à fortiori* de même pour des accroissements plus petits, et alors le problème de l'interpolation peut s'énoncer ainsi.

Connaissant les valeurs $u_0, u_1, u_2 \ldots u_n$ *d'une fonction qui correspondent à des valeurs* $x_0, x_0 + h, x_0 + 2h \ldots x_0 + nh$ *de la variable; admettant, de plus, que pour des accroissements égaux quelconques de* x, *les différences* $n+1^{mes}$ *de la fonction soient égales à zéro : trouver la valeur de cette fonction qui correspond à une valeur donnée de* x *comprise entre les limites* x_0 *et* $x_0 + nh$.

La solution de ce problème est fondée sur une formule dont nous donnerons d'abord la démonstration.

373. Si $u_0, u_1 \ldots u_n$ sont les valeurs de U qui correspondent aux valeurs $x_0, x_0 + h \ldots x_0 + nh$ de la variable, on sait que toutes ces valeurs peuvent se former si l'on connaît la première u_0 et ses n différences

$$\Delta u_0, \Delta^2 u_0 \ldots \Delta^n u_0$$

Si l'on connaît, par exemple, u_0, Δu_0, $\Delta^2 u_0$, on formera le tableau suivant :

x	u	Δu	$\Delta^2 u$
x_0	u_0	Δu_0	$\Delta_2 u_0$
x_1			
x_2			

et la somme $\Delta u_0 + \Delta^2 u_0$, représentera la valeur Δu_1, $u_0 + \Delta u_0$ représentera u_1, et enfin $u_1 + \Delta u_1$, c'est-à-dire

$$u_0 + \Delta u_0 + \Delta u_0 + \Delta^2 u_0 = u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0,$$

représentera u_2.

De même si l'on connaît u_0, Δu_0, $\Delta^2 u_0$, $\Delta^3 u_0$, on pourra calculer u_1, u_2, u_3 à l'aide du tableau suivant :

x	u	Δu	$\Delta^2 u$	$\Delta^3 u$
x_0	u_0	Δu_0	$\Delta^2 u_0$	$\Delta^3 u_0$
x_1				
x_2				
x_3				

on aura

$$\Delta^2 u_1 = \Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0,$$

$$\Delta u_1 = \Delta u_0 + \Delta^2 u_0,$$

$$\Delta u_2 = \Delta u_1 + \Delta^2 u_1 = \Delta u_0 + \Delta^2 u_0 + \Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0 = \Delta u_0 + 2\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0,$$

[1] $u_1 = u_0 + \Delta u_0,$

[2] $u_2 = u_1 + \Delta u_1 = u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0,$

[3] $u_3 = u_2 + \Delta u_2 = u_0 + 3\Delta u_0 + 3\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0.$

On conçoit que la méthode est générale, elle permettra de déterminer u_n si l'on connaît u_0, Δu_0 ... $\Delta^n u_0$. La formule qui donne cette expression s'aperçoit par induction. Si l'on remarque que les coefficients des formules [2] et [3] sont précisément ceux des puissances deuxième et troisième du binome, on est conduit à présumer que l'on a, en général,

$$u_n = u_0 + n\Delta u_0 + \frac{n.n-1}{2}\Delta^2 u_0 + \frac{n(n-1)n-2}{1.2.3}\Delta^3 u_0 + \ldots + \Delta^n u_0.$$

Pour le démontrer admettons que l'on ait trouvé

$$[4]\quad u_{n-1} = u_0 + A_1\Delta u_0 + A_2\Delta^2 u_0 + A_3\Delta^3 u_0 + \ldots A_p\Delta^p u_0 + \ldots \Delta^{n-1} u_0,$$

on aura évidemment, en remarquant que la différence d'une somme est la somme des différences de chacun de ses termes,

$$\Delta u_{n-1} = \Delta u_0 + A_1\Delta^2 u_0 + A_2\Delta^3 u_0 + \ldots + \Delta^n u_0,$$

or

$$u_n = u_{n-1} + \Delta u_{n-1},$$

et, par suite,

$$u_n = u_0 + \left.\begin{matrix} A_1 \\ +1 \end{matrix}\right| \Delta u_0 + \left.\begin{matrix} A^2 \\ +A_1 \end{matrix}\right| \Delta^2 u_0 + \ldots \left.\begin{matrix} A_{p+1} \\ +A_p \end{matrix}\right| \Delta^{p+1} u + \ldots$$

Si donc les coefficients de u_{n-1} sont ceux de la puissance $n-1$ d'un binome, ceux de u_n seront (chap. XIII, *Exercices*) ceux de la puissance n^{me}.

374. Si dans la formule

$$[1]\qquad u_n = u_0 + n\Delta u_0 + \frac{n \,.\, n-1}{1.2}\Delta^2 u_0 + \ldots$$

on suppose que l'accroissement h de x soit représenté par $\frac{x-x_0}{n}$, nh deviendra égal à $x-x_0$, et la valeur x_0+nh à laquelle se rapporte u_n sera x. En adoptant cette notation, de l'égalité

$$\frac{x-x_0}{n} = h,$$

on déduit

$$n = \frac{x-x_0}{h},$$

et la formule [1] devient

$$[2]\, u_x = u_0 + \frac{(x-x_0)}{h}\Delta u_0 + \frac{\frac{x-x_0}{h}\cdot\left(\frac{[x-x_0]}{h}-1\right)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \ldots$$
$$+ \frac{\frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\ldots\left(\frac{x-x_0}{h}-n+1\right)}{1.2\ldots n}\Delta^n u_0.$$

Cette valeur de u_x considérée comme une fonction de x sera de degré n, elle aura par conséquent (362) sa différence $n+1^{me}$ égale à zéro. De plus, pour $x=x_0$, $x=x_0+h$, ... $x=x_0+nh$, elle reproduit évidemment les valeurs données u_0, u_1, ... u_n, elle

satisfait par conséquent aux conditions imposées (372) à la fonction cherchée, et l'on pourra la regarder comme fournissant la valeur de u pour des valeurs quelconques de x comprises entre x_0 et $x_0 + nh$.

Nous donnerons une application de la méthode précédente.

Supposons que l'on veuille obtenir le logarithme de 3,1415926536 par le moyen d'une table de logarithmes à dix décimales. On regardera les logarithmes contenus dans cette table comme les valeurs données de la fonction u, les nombres comme celles de x, et l'on formera le tableau suivant :

x	u	Δu_0	$\Delta^2 u_0$	$\Delta^3 u_0$	$\Delta^4 u_0$
3,14	0,4969296481	0,0013809057	−0,0000043769	0,0000000277	−0,0000000003
3,15	0,4983105538	0,0013765288	−0,0000043492	0,0000000274	
3,16	0,4996870826	0,0013721796	−0,0000043218		
3,17	0,5010592622	0,0013678578			
3,18	0,5024271200				

La différence quatrième étant extrêmement petite, on peut considérer la différence cinquième comme nulle.

Pour appliquer la formule

$$[3]\; u_x = u_0 + \frac{x - x_0}{h}\Delta u_0 + \frac{\left(\frac{x - x_0}{h}\right)\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right)}{1\,.\,2}\Delta^2 u_0$$

$$+ \frac{\frac{(x - x_0)}{h}\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right)\left(\frac{x - x_0}{h} - 2\right)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\Delta^3 u_0$$

$$+ \frac{\frac{(x - x_0)}{h}\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right)\left(\frac{x - x_0}{h} - 2\right)\left(\frac{x - x_0}{h} - 3\right)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\Delta^4 u_0$$

nous devons faire :

$$u_0 = 0,4969296481\,,$$
$$\Delta u_0 = 0,0013809057\,,$$
$$\Delta^2 u_0 = -0,0000043769\,,$$
$$\Delta^3 u_0 = 0,0000000277\,,$$
$$\Delta^4 u_0 = -0,0000000003\,;$$

et comme

$$h = 0,01\,,$$
$$x_0 = 3,14\,, \quad x - x_0 = 0,0015926536\,;$$

on obtiendra

$$\frac{x-x_0}{h}=0,15926536,\quad \frac{\frac{x-x_0}{h}-3}{2}=-0,42036732;$$

$$\frac{\frac{(x-x_0)}{h}-2}{3}=-0,61357821,\quad \frac{\frac{x-x_0}{h}-1}{4}=-0,71018366.$$

Avec ces valeurs il sera facile de mettre en nombres la formule [3] qui donnera

$$u_x=\log 3,1415926536=0,4971498726.$$

Autre formule d'interpolation.

375. Il existe une autre formule qui fait connaître approximativement les valeurs d'une fonction u, lorsqu'on connaît les valeurs u_0, u_1, ... u_n qu'elle prend pour des valeurs x_0, x_1, x_2,... x_n, de la variable. Nous supposons, comme précédemment, que u soit une fonction rationnelle de x du degré n. Soit donc

$$u_n=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\ldots+\mu x^n,$$

on aura

$$u_0=\alpha+\beta x_0+\gamma x_0^2+\ldots+\mu x_0^n,$$
$$u_1=\alpha+\beta x_1+\gamma x_1^2+\ldots+\mu x_1^n,$$
$$u_2=\alpha+\beta x_2+\gamma x_2^2+\ldots+\mu x_2^n,$$
$$\vdots$$
$$u_n=\alpha+\beta x_n+\gamma x_n^2+\ldots+\mu x_n^n;$$

et l'on pourrait déterminer α, β,... μ, en résolvant ces équations qui sont du premier degré, mais on se dispense de cette résolution en posant

$$u_x=\mathrm{X}u_0+\mathrm{X}_1u_1+\mathrm{X}_2u_2+\ldots+\mathrm{X}_nu_n.$$

X_0, X_1, X_2,... X_n étant des fonctions de x assujetties aux conditions suivantes :

Pour $x=x_0$, X_1, X_2, ... X_n doivent s'annuler et X devenir égal à l'unité;

Pour $x=x_1$, X_0, X_2, ... X_n doivent s'annuler et X_1 devenir égal à l'unité;

Digitized by Google

Pour $x=x_2$, X_0, X_1, X_3, ... X_n doivent s'annuler et X_2 devenir égal à l'unité;

⋮

Pour $x=x_n$, X_0, X_1, ... X_{n-1} doivent s'annuler et X_n devenir égal à l'unité.

Il est évident, en effet, que d'après ces conditions u_x deviendra égal à u_0, u_1, ... u_n pour les valeurs x_0, x_1, ... x_n de x.

X_0 s'annulant pour les valeurs x_1, x_2, ... x_n de x, on peut poser

$$X_0 = A_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n);$$

et comme, pour $x=x_0$, on doit avoir $X_0=1$, on posera

$$A=\frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)};$$

en sorte que

$$X_0=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)};$$

on trouvera de même

$$X_1=\frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)},$$

$$X_2=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)\ldots(x_2-x_n)},$$

la formule cherchée est donc

$$ux=u_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}+u_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}$$
$$+u_n\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}.$$

RÉSUMÉ.

387. Définition des différences. — **388.** Définition des différences secondes. — **389.** Définition des différences d'un ordre quelconque. Si l'on considère m nombres, ils donnent lieu à $m-1$ différences premières, à $m-2$ différences secondes, etc. Il n'y a pas de différence m^{me}. — **390.** Usage des différences pour la formation des carrés. — **391.** Usage des différences pour la formation des cubes. — **392.** La différence m^{me} d'un polynome de degré m est constante. — **393.** La différence première

d'un polynome contient en facteur l'accroissement h attribué à la variable. La différence seconde contient h^2 en facteur, et en général, la différence d'ordre p contient h^p en facteur. La différence m^{me} est $1.2...mAh^m$. — 364. Application des résultats précédents à la formation des valeurs d'un polynome qui correspondent aux valeurs entières de la variable. — 365. Usage des différences dans la formation des tables de logarithmes. — 366. Usage des différences pour la sommation des suites— 367. Calcul de la fonction dont la différence correspondant à l'accroissement 1 de la variable est x^m. Application à la somme des puissances semblables des nombres naturels. — 368. Sommation d'une série de produits. — 369. Nombre de boulets contenus dans une pile triangulaire. — 370. Nombre de boulets contenus dans une pile quadrangulaire. — 371. Nombre de boulets contenus dans une pile rectangulaire. — 372. Énoncé du problème que l'on se propose dans l'interpolation. — 373. Formule qui donne la valeur de $F(x+nh)$, connaissant $F(x)$ et ses n premières différences. — 374. Application à la solution du problème d'interpolation. — 375. Autre solution du problème d'interpolation dans un cas plus général où les valeurs données de la fonction correspondent à des valeurs quelconques de la variable.

EXERCICES.

I. Si u_0, u_1, ..., u_n désignent les $n+1$ premiers termes d'une suite, prouver que l'on a

$$\Delta^n u_0 = u_n - n u_{n-1} + \frac{n.n-1}{1.2} u_{n-2} - \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3} u_{n-3}$$
$$\pm \frac{n.(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p} u_{n-p} \ldots \pm u_0.$$

II. Sommer la suite

$$\sin x + \sin(x+h) \ldots + \sin(x+nh).$$

CHAPITRE XXXI.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES.

Opérations préliminaires.

376. Pour résoudre une équation numérique, il convient d'appliquer d'abord la méthode des racines commensurables, et de supprimer les facteurs qui leur correspondent. On doit ensuite appliquer, à l'équation, la méthode exposée au chapitre XXVII, pour la décomposer, s'il y a lieu, en plusieurs autres qui n'aient plus que des racines simples. La première de ces opérations n'a d'autre but que de rendre les calculs plus simples. La seconde est indispensable, elle nous permettra d'affirmer, dans ce qui va suivre, que s'il existe une racine a, deux nombres $a-h$, $a+h'$, qui la comprennent, étant substitués dans l'équation, doivent donner des résultats de signes contraires, quand h et h' sont suffisamment petits. Il suffit évidemment pour cela qu'il n'y ait aucune racine autre que a comprise entre $a-h$ et $a+h'$.

Enfin, avant de commencer l'application de la méthode de recherche que nous allons exposer, il sera bon de fixer, par la règle de Descartes, une limite supérieure du nombre de racines positives et du nombre de racines négatives que peut avoir l'équation proposée.

Séparation des racines.

377. Après avoir exécuté les opérations préliminaires dont nous venons de parler, et dont, je le répète, celle qui est relative aux racines égales est seule indispensable, on substituera, dans le premier membre de l'équation proposée, les nombres entiers consécutifs : $-\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \ldots$ Cette substitution se fera, comme il a été expliqué (**364**), par la méthode des différences, c'est-à-dire que l'on calculera directement un nombre de valeurs consécutives égal au degré m de l'équation, et l'on en déduira leurs différences jusqu'à celle

de l'ordre $m-1$; puis, en se fondant sur ce que la différence de l'ordre m est constante et égale (365) à $A.1.2...m$ (A étant le coefficient du premier terme), on pourra, par de simples additions, former le tableau des valeurs des différences successives, et enfin de la fonction elle-même. On s'arrêtera, dans ce tableau, lorsque l'un des résultats obtenus sera de même signe que les différences qu'on doit lui ajouter pour obtenir les suivants; en sorte que la valeur absolue de ces résultats allant toujours en croissant, il n'y ait plus possibilité que la fonction devienne égale à zéro.

Si les résultats de la substitution des nombres entiers ne sont pas tous de même signe, il y arrivera, une ou plusieurs fois, que deux résultats consécutifs soient de signes contraires, et nous pourrons affirmer qu'entre les nombres entiers correspondants il existe une ou un nombre impair de racines.

Si le nombre des intervalles dans lesquels l'existence des racines réelles devient ainsi manifeste, est précisément égal au nombre des racines que le théorème de Descartes permet de supposer, les racines *sont séparées*, c'est-à-dire que l'on est assuré d'avoir, pour chacune d'elles, deux nombres qui les comprennent et qui n'en comprennent pas d'autres.

Mais s'il arrive, au contraire, que le nombre de ces intervalles soit moindre que le nombre des racines possibles, et, en particulier, si les nombres entiers substitués dans le premier membre donnent tous des résultats de mêmes signes, on doit rester dans le doute et recourir à de nouvelles substitutions. Mais ces substitutions ne doivent être faites que dans des intervalles choisis, où elles présentent quelque chance de succès. Voici comment on déterminera ces intervalles :

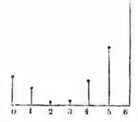
378. Après avoir obtenu les résultats de la substitution des nombres entiers dans le premier membre de l'équation proposée, on portera sur une ligne droite, à partir d'une origine O, des longueurs égales qui représentent les valeurs 1, 2, 3 ..., attribuées à l'inconnue x, et en sens opposé, des longueurs destinées à représenter les valeurs négatives -1, -2, -3...; puis, par l'extrémité de chacune de ces longueurs, on élèvera (sans y apporter *aucune* précision) une perpendiculaire égale à la valeur correspondante du premier membre de l'équation pro-

posée, cette perpendiculaire étant portée dans un sens ou dans un autre, suivant que la valeur est positive ou négative. Il est évident que si l'on procédait de la même manière, non plus seulement pour les valeurs entières, mais pour toutes les valeurs possibles de x, on obtiendrait une courbe, et les intersections de cette courbe avec la droite, sur laquelle on porte les x, feraient connaître les racines, car elles correspondraient à la valeur de x pour laquelle le premier membre de l'équation s'annulant, il faut porter une perpendiculaire nulle au-dessus de l'axe. Les valeurs particulières du premier membre que nous avons obtenues font connaître des points de cette courbe, et permettent de se faire *à peu près* une idée de sa forme, et d'en conclure par conséquent les intervalles dans lesquels l'existence des racines est probable et où il convient de les chercher par des substitutions nouvelles.

Si, par exemple, en substituant à x les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, on trouve, pour le premier membre d'une équation, les valeurs

1,50, 0,85, 0,08, 0,15, 1,25, 3, 4.

Les points correspondants, qu'il faudra construire, sont placés à peu près comme il suit :



Et l'on conçoit que si la courbe qui les réunit coupe l'axe des x, ce doit être entre les points 2 et 3. Cependant *nous ne sommes nullement en droit d'affirmer* que, dans les autres intervalles, il n'y ait pas de racines; il pourrait même, à la rigueur, en exister entre 5 et 6 (intervalle où l'inspection des résultats précédents n'en ferait certainement pas présumer). Il suffirait que la courbe inconnue qui réunit nos différents points fût suffisamment contournée.

379. Il existe cependant un théorème qui assigne une limite

aux irrégularités que peuvent présenter les courbes analogues à celles dont il vient d'être question.

Si l'équation proposée est de degré m, *une parallèle à la ligne sur laquelle on porte les valeurs de* x *ne peut, dans aucun cas, rencontrer la courbe en plus de* m *points.*

Soit, en effet, d la distance de cette parallèle à la ligne des x, elle rencontrera la courbe précisément aux points qui correspondent aux valeurs de x, pour lesquelles le premier membre est égal à d. Or en égalant le premier membre à un nombre donné, on obtient une équation de degré m qui ne peut avoir plus de m racines. J'ajoute que souvent l'application du théorème de Descartes à cette équation donnera une limite plus petite encore.

Si nous revenons à l'exemple proposé dans le chapitre précédent, on voit que l'existence d'une racine comprise entre 5 et 6 exigerait que la courbe pût être coupée en quatre points au moins par une parallèle à la ligne des x, et que, par suite, l'équation obtenue en égalant le premier membre à un nombre d pût avoir quatre racines positives.

380. Lorsque l'inspection des résultats obtenus aura indiqué les intervalles dans lesquels on présume l'existence des racines, on devra substituer, dans ces intervalles, des nombres équidistants d'un dixième, et il arrivera, la plupart du temps, que ces substitutions montreront assez nettement la forme de la courbe, pour qu'on aperçoive avec certitude les limites qui comprennent les racines, ou que l'on acquière la conviction qu'il n'en existe pas. Nous n'avons rien à ajouter sur la manière de tirer parti de ces résultats nouveaux : il faudrait répéter mot pour mot ce que nous avons dit au sujet de la substitution des nombres entiers.

Pour calculer les résultats de la substitution des nombres, de dixièmes en dixièmes, il faudra procéder comme pour celle des nombres entiers : calculer d'abord un nombre de résultats consécutifs égal au degré de l'équation, former les différences qui en résultent, et chercher ensuite les valeurs suivantes par de simples additions.

Simplification relative à l'équation du troisième degré.

381. Dans le cas particulier où l'équation est du troisième degré, la différence troisième et la série des différences secondes

Digitized by Google

peuvent se déduire facilement des résultats obtenus par la substitution des nombres entiers. Rappelons-nous en effet les résultats obtenus (364).

Si l'on considère un polynome du troisième degré

$$y = x^3 + px^2 + qx + r;$$

on a, pour expression de ses différences successives,

$$[1] \qquad \Delta y = 3hx^2 + (3h^2 + 2ph)x + h^3 + ph^2 + qh,$$

$$[2] \qquad \Delta^2 y = 6h^2 x + (6h + 2p)h^2,$$

$$[3] \qquad \Delta^3 y = 6h^3.$$

Supposons que, pour une certaine valeur de x, on connaisse ces différences calculées pour une valeur h_1 de l'accroissement h, et cherchons, en général, ce qu'elles deviendront si l'accroissement de x devient dix fois moindre et égal à $\frac{h_1}{10}$.

Les formules [1], [2], [3] deviennent, si on y remplace h par $\frac{h_1}{10}$

$$[1] \qquad \Delta y = \frac{3h_1x^2}{10} + \left(\frac{3h_1^2}{100} + \frac{2ph_1}{10}\right)x + \frac{h_1^3}{1000} + \frac{ph_1^2}{100} + \frac{qh_1}{10},$$

$$[2] \qquad \Delta^2 y = \frac{6h_1^2 x}{100} + \left(\frac{6h_1}{10} + 2p\right)\frac{h_1^2}{100},$$

$$[3] \qquad \Delta^3 y = \frac{6h_1^3}{1000}.$$

La troisième des équations précédentes prouve que $\Delta^3 y$ est mille fois plus petit que pour la valeur h_1 de h.

La seconde peut s'écrire

$$[4] \qquad \Delta^2 y = \frac{6h_1^2 x}{100} + \frac{(6h_1 + 2p)h_1^2}{100} - 6h_1^3\left(\frac{1}{100} - \frac{1}{1000}\right).$$

Les deux premiers termes représentent la centième partie de la valeur de $\Delta^2 y$ relative à l'accroissement h_1, le suivant se calculera très-facilement chaque fois que h_1 sera donné (h_1 sera presque toujours l'un des nombres 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, etc.)

L'équation [1] peut s'écrire

$$\Delta y = \frac{3h_1x^2 + (3h_1^2 + 2ph_1)x + h_1^3 + ph_1^2 + qh_1}{10} - 3h_1^2x\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{100}\right)$$
$$- h_1^3\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{1000}\right) - ph_1^2\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{100}\right);$$

et l'on voit que Δy se compose de la dixième partie de la différence relative à l'accroissement h_1, diminuée de termes, tous très-faciles à calculer.

Application de la méthode précédente.

382. Considérons l'équation

$$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

Si nous substituons à x les valeurs -1, 0, $+1$, nous trouvons, pour le premier membre, les valeurs correspondantes 13, 7, 1, dont les différences premières sont -6, -6, et la différence seconde 0. Quant à la différence troisième on sait (**363**) qu'elle est égale à 6. Nous formerons donc le tableau suivant :

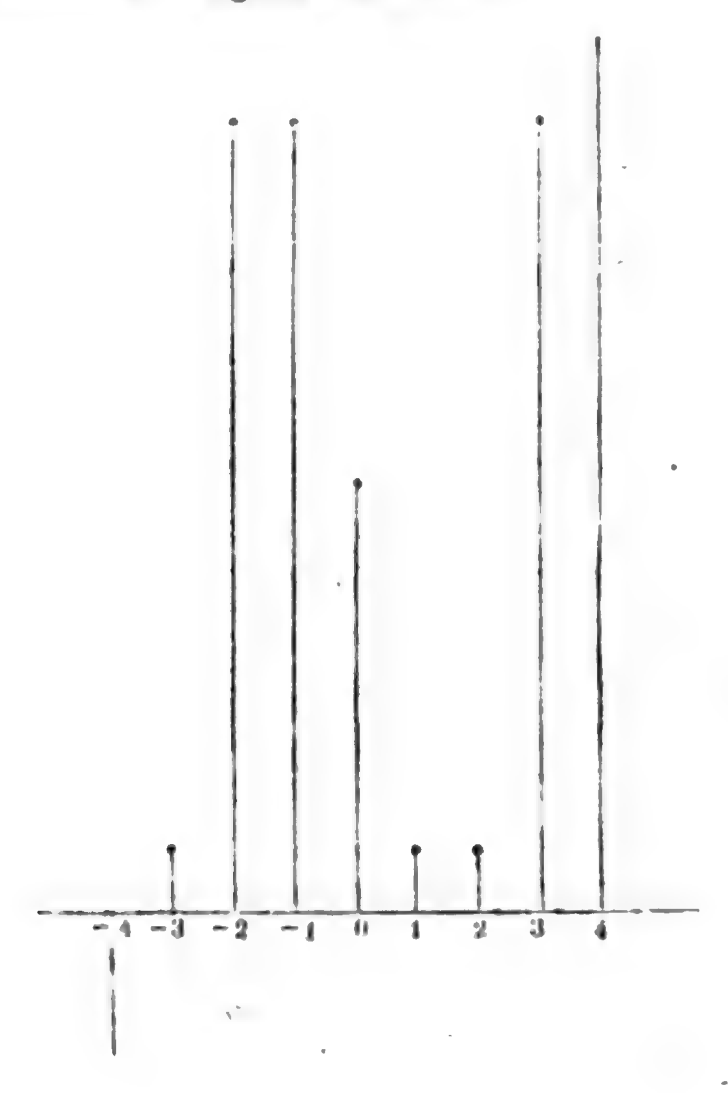
x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
				6
				6
-1	13	-6	0	6
0	7	-6		6
1	1			6
				6
				6
				6
				6

et nous en déduirons, par des additions successives, la table des valeurs de $\Delta^2 y$, Δy, y, que j'inscris dans un nouveau tableau, afin que l'on aperçoive mieux dans le précédent les résultats qui servent de base à tous les autres

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
— 4	—29	30	—18	
— 3	1	12	—12	6
— 2	13	0	— 6	6
— 1	13	—6	0	6
0	7	—6	6	6
1	1	0	12	6
2	1	12	18	6
3	13	30	24	6
4	43	54	30	
5				

A l'inspection des valeurs de y, on voit qu'il existe une racine négative comprise entre — 3 et — 4, et comme la règle de Descartes apprend qu'il n'en existe qu'une, il n'y a pas lieu d'en chercher d'autres.

Quant aux racines positives il peut en exister deux, mais, pour les découvrir, nous devons recourir à de nouvelles substitutions. Si nous représentons graphiquement les résultats obtenus, nous obtenons la figure suivante :



Digitized by Google

La courbe qui réunit ces points ne devant être coupée qu'en trois points par une parallèle à la ligne des x, ne peut évidemment couper cette ligne des x qu'entre les points 1 et 2 ; c'est donc entre $x=1$ et $x=2$, que nous devons substituer des valeurs distantes de 0,1.

Nous savons que pour $x=1$, le premier membre que nous désignons par y, est lui-même égal à 1, on a, de plus, pour des accroissements de x égaux à l'unité $\Delta y=0$, $\Delta^2 y=12$, $\Delta^3 y=6$, l'accroissement devenant égal à $\frac{1}{10}$, nous aurons (381), en remarquant que l'on a, dans le cas actuel, $p=0$, $h_1=1$,

$$\Delta^3 y=0{,}006,\ \Delta^2 y=12\times 0{,}01-0{,}054=0{,}066,$$

$$\Delta y=0\times 0{,}1-3\times 0{,}09-0{,}099=-0{,}369;$$

et nous pourrons, d'après ces valeurs, former le tableau suivant :

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1	1	—0,369	0,066	0,006
1,1	0,631	—0,303	0,072	0,006
1,2	0,328	—0,231	0,078	0,006
1,3	0,097	—0,153	0,084	0,006
1,4	—0,056	—0,069	0,090	0,006
1,5	—0,125	0,021	0,096	0,006
1,6	—0,104	0,117	0,102	0,006
1,7	0,013	0,219	0,108	0,006
1,8	0,232	0,327	0,114	0,006
1,9	0,559	0,441	0,120	0,006
2	1	0,561	0,126	0,006

On voit, à l'inspection de ce tableau que y change de signe quand x passe de la valeur 1,3 à la valeur 1,4 et de la valeur 1,6 à 1,7. Il y a donc deux racines positives dont les valeurs, à un dixième près, sont 1,3 et 1,6.

383. Si l'on voulait obtenir une plus grande approximation, il faudrait substituer à x des valeurs distantes de 0,01 entre 1,3 et 1,4 et entre 1,6 et 1,7. Ces substitutions se feront comme les précédentes au moyen des différences. On commencera par re-

Digitized by Google

marquer que pour $x = 1,3$ on a $y = 0,097$, à partir de cette valeur les différences relatives à un accroissement de x égal à 0,1 sont, comme on le voit par le tableau précédent,

$$y = 0,097, \quad \Delta y = -0,153, \quad \Delta^2 y = 0,084, \quad \Delta^3 y = 0,006.$$

Si nous voulons en déduire les valeurs des différences relatives à un accroissement de x égal à 0,01, nous reprendrons les formules (**381**) qui deviennent, dans le cas actuel, puisque l'on a $p = 0$, $h_1 = \frac{1}{10}$, $x = 1,3$,

$$\Delta^3 y = \frac{0,006}{1000} = 0,000006,$$

$$\Delta^2 y = (0,084)\frac{1}{100} - 6 \times \frac{1}{1000}\left(\frac{1}{100} - \frac{1}{1000}\right) = 0,000786,$$

$$\Delta y = -(0,153)\frac{1}{10} - 3 \times \frac{1}{100}\, x(0,09) - \frac{1}{1000}(0,099) = -0,018909;$$

et comme on a d'ailleurs pour $x = 1,3$

$$y = 0,097,$$

on peut former le tableau suivant :

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1,3	0,097000	—0,018909	0,000786	0,000006
1,31	0,078091	—0,018123	0,000792	id.
1,32	0,059968	—0,017331	0,000798	id.
1,33	0,042637	—0,016533	0,000804	id.
1,34	0,026104	—0,015729	0,000810	id.
1,35	0,010375	—0,014919	0,000816	id.
1,36	—0,004544	—0,014103	0,000822	id.
1,37	—0,018647	—0,013281	0,000828	id.
1,38	—0,031928	—0,012453	0,000834	id.
1,39	—0,044381	—0,011619	0,000840	id.
1,4	—0,056000	—0,010779	0,000846	id.

On calculera au moyen des mêmes formules (501) les valeurs de Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$ qui correspondent à des accroissements de x égaux à 0,01 à partir de la valeur $x = 1,6$, et l'on formera le tableau suivant :

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1,6	—0,104000	0,007281	0,000966	0,000006
1,61	—0,096719	0,008247	0,000972	id.
1,62	—0,088472	0,009219	0,000978	id.
1,63	—0,079253	0,010197	0,000984	id.
1,64	—0,069056	0,011181	0,000990	id.
1,65	—0,057875	0,012171	0,000996	id.
1,66	—0,045704	0,013167	0,001002	id.
1,67	—0,032537	0,014169	0,001008	id.
1,68	—0,018368	0,015177	0,001014	id.
1,69	—0,003191	0,016191	0,001020	id.
1,7	+0,013000	0,017211	0,001026	id.

On voit, d'après ces tableaux, que les deux racines sont comprises, l'une entre 1,69 et 1,70, l'autre entre 1,36 et 1,37. Pour calculer la plus grande à un millième près, il faut substituer, entre 1,69 et 1,70, des valeurs distantes d'un millième. Ces valeurs calculées par le même procédé que les précédentes, résultent du tableau suivant :

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1,69	—0,003191000	0,001573371	0,000010146	0,000000006
1,691	—0,001617629	0,001583517	0,000010152	id.
1,692	—0,000034112	0,001594669	0,000010158	id.
1,693	+0,001559557	0,001603827	0,000010164	id.
1,694	0,003163384	0,001613991	0,000010170	id.
1,695	0,004777375	0,001624161	0,000010176	id.
1,696	0,006401536	0,001634337	0,000010182	id
1,697	0,008035873	0,001644519	0,000010188	id.
1,698	0,009680392	0,001654707	0,000010194	id.
1,699	0,011335099	0,001664901	0,000010200	id.
1,70	0,013000000	0,001675101	0,000010206	id.

On voit que y change de signe lorsque x passe de la valeur 1,692 à 1,693. La racine est donc, à un millième près, égale à 1,692.

384. Les tableaux précédents permettent de pousser l'approximation plus loin encore.

Remarquons en effet, que dans le dernier de ces tableaux la différence seconde est extrêmement petite. On peut donc, *sans erreur sensible*, la considérer comme nulle, et admettre, par suite, que les accroissements de y soient proportionnels à ceux de x. Nous pourrons alors obtenir la valeur de x pour laquelle y est nul, en procédant comme on le fait dans l'emploi des tables de logarithmes. Nous dirons :

Lorsque x augmente de 0,001 et passe de la valeur 1,692 à la valeur 1,693, la variation de y, est 0,001594669.

Pour que la variation de y soit 0,000034112, c'est-à-dire pour que y devienne zéro, il faut donc que la variation δ de x satisfasse à la proportion

$$0{,}001 : \delta :: 0{,}001594669 : 0{,}000034112,$$

d'où l'on déduit

$$\delta = \frac{0{,}000000034112}{0{,}001594669} = 0{,}000002$$

en sorte que la racine est égale, approximativement, à 1,692002.

On doit observer que la différence seconde que nous avons considérée comme nulle étant, en réalité, un peu plus grande que 0,00001, peut influer sur le cinquième des chiffres décimaux, et il n'y a, par conséquent, aucune raison pour considérer le sixième comme exact.

On doit donc considérer la racine comme égale à 1,6930.

385. Dans l'exemple précédent, la détermination des intervalles dans lesquelles il convenait d'effectuer de nouvelles substitutions n'a présenté aucune difficulté. Malheureusement il n'en est pas toujours ainsi. Nous en citerons un exemple.

Soit l'équation

$$y = 9x^3 - 24x^2 + 16x - 0{,}001 = 0.$$

Si nous substituons à x les valeurs -1, 0, 1, nous trouvons pour valeurs correspondantes de y, $-49{,}001$, 0,001, 0,0999, dont les différences sont 49, 1, et la différence seconde -48. Quant à la différence troisième elle est (363) égale à 54.

Nous pouvons, d'après cela, former le tableau suivant :

Digitized by Google

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
—1	—49,001	49	— 48	54
0	— 0,001	1	6	54
1	+ 0,999	7	60	54
2	7,999	67	114	54
3	74,999	181	168	54
4	255,999	349	222	54

et si l'on représente ces valeurs graphiquement, ainsi qu'on l'a indiqué (378), on voit clairement qu'il existe une racine entre $x=0$ et $x=1$, mais rien ne fait pressentir qu'il y en ait d'autres et ne porte à essayer de nouvelles substitutions. Si cependant, on substitue les valeurs distantes de 0,1 entre $x=1$ et $x=2$, on trouve que les valeurs des différences relatives à $x=1$ et à un accroissement de x égal à 0,1 sont $\Delta y=-0,461$, $\Delta^2 y=0,114$, $\Delta^3 y=0,054$, ce qui permet de former le tableau suivant :

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1	0,999	—0,461	0,114	0,054
1,1	0,538	—0,347	0,168	id.
1,2	0,191	—0,179	0,222	id.
1,3	0,012	+0,043	0,276	id.
1,4	0,055	0,319	0,330	id.
1,5	0,374	0,649	0,384	id.
1,6	1,023	1,033	0,438	id.
1,7	2,056	1,471	0,492	id.
1,8	3,527	1,963	0,546	id.
1,9	5,490	2,509	0,600	id.
2	7,999	3,109	0,654	id.

En représentant graphiquement les résultats qui y sont contenus, l'on voit clairement que la courbe qui passe par les points obtenus, ne peut couper la ligne des x qu'entre le point 1,3 et le point 1,4. Substituons donc entre ces deux valeurs, des valeurs de x distantes de 0,01, ces valeurs se calculeront comme les précédentes en formant d'abord, par les formules (381), les valeurs de Δy, $\Delta^2 y$ et $\Delta^3 y$ qui correspondent à $x=1,3$, et à des accroissements de la variable égaux à 0,01 : nous formerons ainsi le tableau suivant :

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1,3	+0,012000	−0,006581	0,002274	0,000054
1,31	+0,005419	−0,004307	0,002328	id.
1,32	+0,001112	−0,001979	0,002382	id.
1,33	−0,000867	+0,000403	0,002436	id.
1,34	−0,000464	0,002839	0,002490	id.
1,35	+0,002375	0,005329	0,002544	id.
1,36	+0,007704	0,007873	0,002598	id.
1,37	+0,015577	0,010471	0,002652	id.
1,38	+0,026048	0,013123	0,002706	id.
1,39	+0,039171	0,015829	0,002760	id.
1,4	+0,055000	0,018589	0,002814	id.

qui prouve que l'une des racines est comprise entre 1,32 et 1,33, l'autre entre 1,34 et 1,35.

Méthode de Newton.

386. D'après ce que nous avons dit (**365**), lorsque l'accroissement de la variable devient de plus en plus petit, les différences successives d'un polynome diminuent d'autant plus rapidement que leur ordre est plus élevé. Il résulte de là que dans un intervalle suffisamment petit, on peut négliger les différences secondes et regarder les accroissements d'une fonction comme proportionnels à ceux de la variable; on déduit de cette remarque un moyen de calculer une racine avec une très-grande approximation lorsque l'on en connaît déjà une valeur suffisamment approchée.

Soit, en effet,

$$[1] \qquad F(x) = 0;$$

une équation algébrique, et a une valeur approchée d'une racine dont nous désignerons par $a + h$ la valeur exacte, on aura évidemment

$$[2] \qquad F(a + h) = 0;$$

ou

$$[3] \quad F(a) + F'(a)\,h + F''(a)\,\frac{h^2}{1.2} + \ldots + \frac{F^m(a)}{1.2\ldots m}\,h^m = 0,$$

et en négligeant les termes qui contiennent h à une puissance plus élevée que la première, on a, avec une approximation

d'autant plus grande que h est plus petit,

$$F(a+h)=F(a)+F'(a)h;$$

en sorte que l'équation [3] devient

$$F(a)+F'(a)h=0,$$

et l'on en déduit $$h=-\frac{F(a)}{F'(a)};$$

la valeur approchée de la racine est, par conséquent,

$$a-\frac{F(a)}{F'(a)},$$

en désignant cette valeur par b, et appliquant de nouveau le même procédé, on trouvera une valeur plus approchée encore

$$b-\frac{F(b)}{F'(b)},$$

et en répétant cette opération plusieurs fois de suite on obtiendra rapidement une très-grande approximation; il est impossible d'indiquer d'une manière générale, et indépendamment de tout exemple particulier, la rapidité avec laquelle croissent les approximations, mais, dans chaque cas, on s'en forme facilement une idée en procédant, comme nous allons le faire, dans l'exemple suivant.

387. Reprenons l'équation

$$F(x)=x^3-7x+7=0;$$

nous avons trouvé que l'une de ses racines est, à $\frac{1}{1000}$ près, égale à 1,692; si nous la désignons par $1,692+h$, h sera plus petit que 0,001 et nous aurons

$$F(x+h)=F(x)+hF'(x)+\frac{h^2}{1.2}F''(x)+\frac{h^3}{1.2.3}F'''(x)=0,$$

par suite

$$h=-\frac{F(x)}{F'(x)}-\frac{h^2}{1.2}\frac{F''(x)}{F'(x)}-\frac{h^3}{1.2.3}\frac{F'''(x)}{F'(x)};$$

pour $x=1,692$, les coefficients de h^2 et de h^3 sont plus petits que l'unité, en sorte que le second et le troisième terme du

second membre sont moindres, l'un que 0,000001, l'autre que 0,0000C0001, nous avons donc, à un *millionième près*,

$$h = -\frac{F(x)}{F'(x)};$$

on a, d'après le tableau (383), pour $x = 1,692$,

$$F(x) = -0,000034112;$$

d'ailleurs $\qquad F'(x) = 3x^2 - 7 = -4,137136;$

donc $\qquad h = \frac{0,000034112}{4,137136000} = 0,000008,$

et l'on ne doit pousser la division que jusqu'aux millionièmes puisque l'on ne peut répondre de la valeur de h qu'à un millionième près.

Nous avons, au moyen de cette valeur de h, une nouvelle valeur approchée de la racine

$$1,692008 = b,$$

représentons sa valeur exacte par

$$1,692008 + h' = b + h',$$

nous aurons

$$0 = F(b + h') = F(b) + h'F'(b) + \frac{h'^2}{1.2}F''(b) + \frac{h'^3}{1.2.3}F'''(b),$$

d'où $\qquad h' = -\frac{F(b)}{F'(b)} - \frac{h'^2}{1.2}\frac{F''(b)}{F'(b)} - \frac{h'^3}{1.2.3}\frac{F(b)}{F'''(b)};$

h'^2 étant moindre que 0,000000000001 et h'^3 moindre que 0,000000000000000001, les coefficients $\frac{F''(b)}{2F'(b)}$, $\frac{F'''(b)}{6F'(b)}$ étant, comme on s'en assure facilement, moindres que l'unité, si l'on prend

$$h' = -\frac{F(b)}{F'(b)};$$

l'erreur commise sera de l'ordre de 0,000000000001. Cet exemple suffit pour donner une idée de la rapidité des approximations et pour montrer comment on doit l'apprécier dans chaque cas.

Représentation graphique de la méthode de Newton.

388. La méthode d'approximation que nous venons d'exposer, peut se représenter graphiquement d'une manière très-simple, que nous croyons devoir indiquer ici quoiqu'elle exige des notions de géométrie analytique.

La recherche des racines réelles de l'équation

$$f(x)=0$$

revient à celle des points où la courbe qui a pour équation $y=f(x)$, coupe l'axe des x. En désignant par a une valeur approchée de la racine, et par $f(a)$ la valeur correspondante de y, l'équation de la tangente à la courbe

$$y=f(x),$$

au point dont les coordonnées sont a et $f(a)$, est

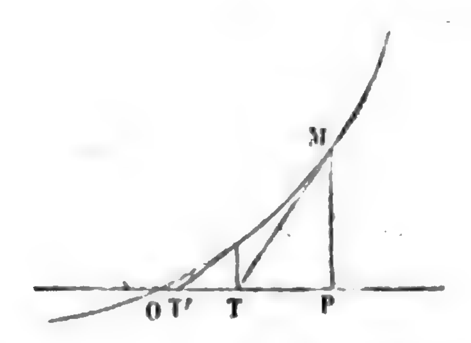
$$y-f(a)=f'(a)(x-a).$$

Cette tangente coupe l'axe des x en un point dont l'abscisse x est évidemment

$$x=a-\frac{f'(a)}{f(a)},$$

c'est-à-dire précisément égale à la valeur fournie par la méthode de Newton.

D'après cela, la méthode de Newton équivaut à la construction suivante :



Ayant la position approchée, P, du point où une courbe coupe l'axe des x, pour en obtenir une autre plus approchée encore, on mène au point M de la courbe qui se projette en P, une tangente MT, et le point T est, *en général*, beaucoup plus près que P de l'intersection cherchée. En répétant la même construc-

tion, on obtiendra un nouveau point T' encore plus rapproché que le précédent, et ainsi de suite.

Sur la résolution des équations transcendantes.

389. La méthode dont nous avons fait usage pour résoudre une équation algébrique, s'applique sans modification à une équation quelconque $F(x)=0$, pourvu que le premier membre soit une fonction continue de la variable. Cette condition suffit, en effet, pour que deux nombres qui, substitués dans le premier membre, donnent des résultats de signes contraires, comprennent nécessairement une racine, et c'est sur cette circonstance que la méthode est fondée. La seule difficulté sera, dans chaque cas, de trouver un moyen simple pour substituer, dans $F(x)$, des nombres équidistants. Nous ne pouvons rien dire de général à ce sujet; la marche à suivre dépendra de la nature de la fonction. Lorsqu'on aura trouvé une valeur suffisamment approchée de la racine, la méthode de Newton permettra, comme nous l'expliquerons plus loin, d'en déduire de nouvelles valeurs de plus en plus approchées.

Nous développerons ce qui précède sur un exemple. En désignant par t la température de la vapeur d'eau, sa force élastique F, exprimée en millimètres de mercure, est donnée par la formule

$$\log F = a - b\alpha^{t+20} - c\beta^{t+20},$$

dans laquelle on a

$$a = 6{,}2640348,$$
$$\log b = 0{,}1397743,$$
$$\log c = 0{,}6924351,$$
$$\log \alpha = \bar{1}{,}994049292,$$
$$\log \beta = \bar{1}{,}998343862.$$

Cherchons quelle est la température pour laquelle la force élastique est égale à 750. Il faut résoudre l'équation

$$\log 750 - a + b\alpha^{x+20} + c\beta^{x+20} = 0,$$

a, b, c, α, β ayant les valeurs indiquées plus haut, et x désignant la température inconnue, nous commencerons par substituer à x des valeurs croissantes, non pas d'une unité, ce qui serait trop long, mais de dix unités. On formera à part les va-

Digitized by Google

leurs de chacun des deux termes $b\alpha^{t+20}$ et $c\beta^{t+20}$, et, pour cela, on calculera leurs logarithmes :

$$\log b + (t+20)\log\alpha,$$
$$\log c + (t+20)\log\beta,$$

dans lesquels on supposera successivement $t=0$, $t=10$, $t=20$, $t=30$, $t=40$, $t=50$, $t=60$, $t=70$, $t=80$, $t=90$, $t=100$. En passant ensuite des logarithmes aux nombres, on voit que le premier membre de l'équation proposée ne change de signe que lorsque x passe de la valeur 90 à la valeur 100. On a, en effet, d'après les valeurs données plus haut,

Pour $x = 90$:

$$\begin{array}{rlrl} \log b = & 0{,}1397743 & \log c = & 0{,}6924351 \\ 110\log\alpha = & \bar{1}{,}3454221 & 110\log\beta = & \bar{1}{,}8178248 \\ \hline \log b\alpha^{110} = & \bar{1}{,}4851964 & \log c\beta^{110} = & 0{,}5102599 \end{array}$$

Passant des logarithmes aux nombres, on trouve :

$$b\alpha^{x+20} = 0{,}3056303 \quad \text{et} \quad c\beta^{x+20} = 3{,}237874.$$

Substituant dans l'équation, et remplaçant a par son complément, on a :

$$\begin{array}{rl} \log 750 = & 2{,}8750613 \\ \text{comp}^t\, a = & \bar{3}{,}7359652 \\ b\alpha^{x+20} = & 0{,}3056303 \\ c\beta^{x+20} = & 3{,}237874 \\ \hline \text{le premier membre } y = & 0{,}1545308 \end{array}$$

le résultat est positif.

Pour $x = 100$, on a successivement :

$$\begin{array}{rlrl} \log b = & 0{,}1397743 & \log c = & 0{,}6924351 \\ 120\log\alpha = & \bar{1}{,}2859150 & 120\log\beta = & \bar{1}{,}8012514 \\ \hline \log b\alpha^{120} = & \bar{1}{,}4256893 & \log c\beta^{120} = & 0{,}4936865 \end{array}$$

$$b\alpha^{x+20} = 0{,}2664952 \quad c\beta^{x+20} = 3{,}116639$$

$$\begin{array}{rl} \log 750 = & 2{,}8750913 \\ \text{comp}^t\, a = & \bar{3}{,}7359652 \\ b\alpha^{x+20} = & 0{,}2664952 \\ c\beta^{x-20} = & 3{,}116639 \\ \hline y = & \bar{1}{,}9941607 \\ \text{ou } y = & -0{,}0058393 \end{array}$$

le résultat est négatif.

Ainsi t est compris entre 90 et 100.

En opérant de même pour $x=91$, $x=92$, $x=93$, $x=94$, $x=95$, $x=96$, $x=97$, $x=98$ et $x=99$, on trouve toujours des résultats positifs. Pour $x=99$, on a, en effet,

$$\begin{array}{rlrl} \log b = & 0,1397743 & \log c = & 0,6924351 \\ 119 \log \alpha = & \bar{1},2918657 & 119 \log \beta = & \bar{1},8029196 \\ \hline & \bar{1},4316400 & & 0,4953547 \end{array}$$

$$b\alpha^{x+20} = 0,2701718 \quad c\beta^{x+20} = 3,128633.$$

$$\begin{array}{rl} \log 750 = & 2,8750613 \\ \text{comp}^t\, a = & 3,7359652 \\ b\alpha^{x+20} = & 0,2701718 \\ c\beta^{x+20} = & 3,128633 \\ \hline y = & 0,0098313 \end{array}$$

Par conséquent t est compris entre 99 et 100. En faisant les mêmes calculs pour $x=99,1$, $x=99,2$, $x=99,3$, etc., on trouvera des résultats positifs jusqu'à ce qu'on fasse $x=99,7$. Voici les calculs pour $x=99,6$ et pour $x=99,7$.

Pour $x=99,6$:

$$\begin{array}{rlrl} \log b = & 0,1397743 & \log c = & 0,6924351 \\ 119,6 \log \alpha = & \bar{1},2882953 & 119,6 \log \beta = & \bar{1}.8019359 \\ \hline & \bar{1},4280696 & & 0,4943610 \end{array}$$

$$b\alpha^{x+20} = 0,2679598 \quad c\beta^{x+20} = 3,121483$$

$$\begin{array}{rl} \log 750 = & 2,8750613 \\ \text{comp}^t\, a = & 3,7359652 \\ b\alpha^{x+20} = & 0,2679598 \\ c\beta^{x+20} = & 3,121483 \\ \hline y = & 0,0004693 \end{array}$$

Pour $x=99,7$ ·

$$\begin{array}{rlrl} \log b = & 0,1397743 & \log c = & 0,6924351 \\ 119,7 \log \alpha = & \bar{1},2877003 & 119,7 \log \beta = & \bar{1},8017603 \\ \hline & \bar{1},4274746 & & 0,4941954 \end{array}$$

$$b\alpha^{x+20} = 0,2675929 \quad c\beta^{x+20} = 3,120293$$

$$\begin{array}{rl} \log 750 = & 2,8750613 \\ \text{comp}^t\, a = & 3,7359652 \\ b\alpha^{x+20} = & 0,2675929 \\ c\beta^{x+20} = & 3,120293 \\ \hline y = & \bar{1},9989124 \\ \text{ou } y = & -0,0010876 \end{array}$$

Il en résulte que l'on a $t = 99°,6$, à moins de 0,1 de degré.

390. Quoique l'appréciation d'une température à une plus grande approximation ne présente aucun intérêt, et, que d'ailleurs, la formule [3] n'étant pas rigoureusement exacte, on ne soit pas en droit d'en déduire des valeurs très-approchées de l'inconnue, nous montrerons comment on pourrait, en la supposant exacte, chercher, par la méthode de Newton, une valeur plus approchée. On a trouvé pour valeur approchée de la racine : $x = 99,6$. Supposons que la valeur véritable soit

$$x = 99,6 + h.$$

h étant très-petit : en désignant par $F(x)$ le premier membre de l'équation [8], $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ diffère peu de la dérivée de $F(x)$, c'est-à-dire de $\frac{b\alpha^{x+20}\log\alpha}{\log e}+\frac{c\beta^{x+20}\log\beta}{\log e}$. Nous pouvons donc poser approximativement

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{b\alpha^{x+20}\log\alpha}{\log e}+\frac{c\beta^{x+20}\log\beta}{\log e}.$$

Mais $x+h$ étant racine, on a $F(x+h)=0$. On a trouvé, d'ailleurs, $F(x)=F(99,6)=0,0004693$: cette équation devient donc

$$\frac{-0,0004693}{h}=\frac{b\alpha^{119,6}\log\alpha}{\log e}+\frac{c\beta^{119,6}\log\beta}{\log e},$$

d'où l'on déduira la valeur de h.

391. On pourrait encore calculer la valeur approchée de h par le procédé suivant, qui est d'une application plus facile, mais qui n'a pas, comme la méthode de Newton, l'avantage de pouvoir être répété indéfiniment :

Pour $x = 99,6$, on a $y = 0,0004693$;

pour $x = 99,7$, $y = -0,0010876$;

donc, pour un accroissement de x égal à 0,1, l'accroissement de y est $-0,015569$.

Pour que y devienne 0, il faut que son accroissement soit $-0,0004693$, et que, par suite, l'accroissement h de x soit donné par la proportion

$$h : -0,0004693 :: 0,1 : -0,0015569.$$

Digitized by Google

RÉSUMÉ.

376. Pour résoudre une équation numérique, il faut d'abord chercher les racines commensurables, et supprimer les facteurs qui leur correspondent. On applique ensuite la méthode des racines égales. On cherche enfin, par le théorème de Descartes, une limite du nombre des racines, tant positives que négatives. — **377**. On substitue, dans le premier membre, à la place de l'inconnue, les nombres entiers successifs, en faisant usage de la méthode des différences. — **378.** Les changements de signe obtenus dans les substitutions précédentes font connaître des intervalles dans lesquels il y a des racines. Lors même qu'il n'y a pas changement de signe, les résultats obtenus peuvent indiquer entre quels nombres se trouvent probablement les racines. — **379**. Théorème qui limite les irrégularités que peut présenter la courbe à l'aide de laquelle on représente les valeurs du premier membre. — **380**. Substitutions nouvelles de dixièmes en dixièmes. — **381**. Simplification du calcul des différences relatives à un accroissement d'un dixième, dans le cas où l'équation est du troisième degré.—**382-383**. Application de la méthode précédente à un exemple. — **384**. Calcul d'une valeur plus approchée de la racine à l'aide d'une proportion analogue à celle dont on fait usage dans l'emploi des tables de logarithmes. — **385**. Exemple dans lequel les intervalles dans lesquels doivent se faire les substitutions se reconnaissent moins rapidement. — **386**. Méthode de Newton. — **387**. Application à un exemple.—**388**. Représentation graphique de la méthode. — **389**. Application des substitutions à la résolution d'une équation transcendante. — **390**. Application de la méthode de Newton à la recherche d'une valeur plus approchée. — **391**. Calcul de la valeur approchée de la racine à l'aide d'une proportion.

Digitized by Google

CHAPITRE XXXII.

DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES.

But de ce chapitre.

392. Lorsque les deux termes d'une fraction sont des polynomes entiers par rapport à une même lettre x, on peut, en effectuant leur division autant que possible, décomposer cette fraction en un polynome entier par rapport à cette lettre, et en une autre fraction dont le numérateur soit de degré moindre que le dénominateur. Le but de ce chapitre est de montrer comment cette fraction peut elle-même être décomposée en d'autres plus simples. Nous supposerons seulement qu'on ait résolu l'équation obtenue en égalant le dénominateur à zéro, et qu'on en connaisse toutes les racines.

Cas des racines inégales.

393. Soit la fraction rationnelle

$$[1] \qquad \frac{f(x)}{F(x)},$$

où $f(x)$ désigne un polynome en x de degré moindre que $F(x)$. Soient $a, b, c, \ldots, k, l$ les racines de l'équation

$$F(x) = 0.$$

Nous supposerons d'abord qu'elles soient toutes inégales. Nous allons voir que, dans ce cas, on peut toujours mettre la fraction [1] sous la forme

$$[2] \quad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \ldots + \frac{K}{x-k} + \frac{L}{x-l},$$

A, B, C, ..., K, L désignant des constantes. Pour le démontrer, nous considérerons A, B, C, ... K, L comme des coefficients indéterminés dont nous déterminerons la valeur ; puis nous vérifierons ensuite qu'ils rendent l'équation [2] identique.

L'équation [2], si on multiplie les deux membres par $F(x)$, devient

$$[3] \qquad f(x) = \frac{AF(x)}{x-a} + \frac{BF(x)}{x-b} + \ldots + \frac{KF(x)}{x-f} + \frac{LF(x)}{x-l}.$$

Comme l'équation [3] doit être identique, il faut qu'elle soit satisfaite pour les valeurs $x=a$, $x=b$, ..., $x=l$. Si l'on fait, par exemple, $x=a$, et que l'on remarque que $F(a)$ étant égal à zéro, tous les termes du second membre disparaissent, excepté celui qui est divisé par $x-a$, on a

$$f(a) = A\left[\frac{F(x)}{x-a}\right]_a,$$

en désignant par $\left[\frac{F(x)}{x-a}\right]_a$ la valeur que prend le quotient $\frac{F(x)}{x-a}$ quand on y fait $x=a$. Or on a

$$F(x) = F[a+(x-a)] = F(a) + F'(a)(x-a) + F''(a)\frac{(x-a)^2}{1.2}$$
$$+ \ldots + \frac{F^m(a)}{1.2\ldots m}(x-a)^m,$$

en remarquant que $F(a)=0$, on en conclut

$$\frac{F(x)}{x-a} = F'(a) + \frac{F''(a)}{1.2}(x-a) + \ldots + \frac{F^m(a)}{1.2\ldots m}(x-a)^{m-1},$$

et, en faisant $x=a$, tous les termes du second membre disparaissent, à l'exception du premier; en sorte que

$$\left[\frac{F(x)}{x-a}\right]_a = F'(a),$$

et, par suite, l'équation [3] devient

$$f(a) = AF'(a),$$

d'où l'on conclut $\qquad A = \frac{f(a)}{F'(a)}.$

Digitized by Google

On trouvera de même

$$B = \frac{f(b)}{F'(b)}, \quad C = \frac{f(c)}{F'(c)}, \ \ldots \ L = \frac{f(l)}{F'(l)}.$$

Pour déterminer les valeurs précédentes, nous avons commencé par admettre la possibilité du développement [2] et de l'équation [3], qui en est une conséquence. Il est donc nécessaire de démontrer que ces valeurs, qui évidemment sont les seules possibles, satisfont effectivement. Pour cela, remarquons qu'en les adoptant, l'équation [3] sera satisfaite pour les valeurs a, b, ... k, l de x; or $f(x)$ étant, par hypothèse, de degré moindre que $F(x)$, cette équation est de degré $m-1$, elle ne peut donc avoir m racines sans être satisfaite identiquement.

Cas des racines imaginaires.

394. D'après ce qui précède, en désignant par $f(x)$ un polynome de degré moindre que $F(x)$, et par $a, b, c, \ldots, k, l$ les m racines de $F(x)=0$, on a identiquement

$$[1] \quad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(a)}{F'(a)(x-a)} + \frac{f(b)}{F'(b)(x-b)} + \ldots + \frac{f(l)}{F'(l)(x-l)}.$$

Cette formule suppose seulement que les racines $a, b, \ldots, k, l$ soient inégales. Elle s'applique au cas où quelques-unes d'entre elles seraient imaginaires. Seulement, dans ce cas, il sera convenable de faire subir au second membre quelques réductions destinées à en faire disparaître les quantités imaginaires qui y sont en évidence.

Soient $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ deux racines imaginaires, il est facile de voir que $f(\alpha+\beta\sqrt{-1})$ et $f(\alpha-\beta\sqrt{-1})$ ne diffèrent que par le signe de $\sqrt{-1}$, en sorte que l'une des deux expressions étant $P+Q\sqrt{-1}$, l'autre sera $P-Q\sqrt{-1}$; de même, $F'(\alpha+\beta\sqrt{-1})$ et $F'(\alpha-\beta\sqrt{-1})$ pourront être représentés par $M+N\sqrt{-1}$, $M-N\sqrt{-1}$, en sorte que les deux termes du second membre de [1], qui correspondent aux racines considérées, sont de la forme

$$\frac{P+Q\sqrt{-1}}{(M+N\sqrt{-1})(x-\alpha-\beta\sqrt{-1})} + \frac{P-Q\sqrt{-1}}{(M-N\sqrt{-1}(x-\alpha-\beta\sqrt{-1})},$$

ou, en réduisant au même dénominateur, et supprimant les termes qui se détruisent,

$$\frac{2(PM+QN)(x-\alpha)-2PN\beta+2QM\beta}{(M^2+N^2)[(x-\alpha)^2+\beta^2]}.$$

On voit donc que les deux fractions simples qui correspondent à deux racines conjuguées peuvent être réunies en une seule dont le numérateur est du premier degré par rapport à x, et le dénominateur du second.

Cas des racines égales.

593. Si le dénominateur de la fraction

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

contient des racines égales, les formules précédentes ne sont plus applicables; on peut néanmoins décomposer cette fraction en d'autres plus simples; pour le montrer nous établirons d'abord le théorème suivant.

Si a *désigne une racine multiple de l'équation* $F(x)=0$, α *son degré de multiplicité, la fraction rationnelle* $\frac{f(x)}{F(x)}$ *pourra toujours être décomposée de la manière suivante*,

$$[1] \qquad \frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}F_1(x)}.$$

A *désignant une constante*, $f_1(x)$ *un polynome entier et rationnel*, $F_1(x)$ *le quotient de la division de* $F(x)$ *par* $(x-a)^\alpha$.

On a, en effet, identiquement et quel que soit A,

$$[2] \qquad \frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha F_1(x)}=\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{f(x)-AF_1(x)}{(x-a)^\alpha F_1(x)}.$$

Si nous déterminons A par la condition

$$[3] \qquad f(a)-AF_1(a)=0,$$

le numérateur du second terme du second membre s'annulera

Digitized by Google

par $x=a$, et sera, par conséquent, divisible par $x-a$; en posant donc

$$\frac{f(x)-AF_1(x)}{x-a}=f_1(x);$$

il viendra $$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}F_1(x)};$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

REMARQUE. $F_1(x)$ étant le quotient de la division de $F(x)$ par la plus haute puissance de $x-a$ qui puisse le diviser, $F_1(a)$ ne sera jamais nul, et l'équation [3] fournira toujours pour A une valeur finie. On peut remarquer que cette valeur ne sera jamais nulle : car la fraction $\frac{f(x)}{F(x)}$ étant réduite à sa plus simple expression, $f(x)$ et $F(x)$ ne peuvent pas avoir de racine commune, et, par suite, le numérateur $f(a)$ de A_1 ne peut être égal à zéro.

396. Après avoir mis la fraction $\frac{f(x)}{F(x)}$ sous la forme

[1] $$\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}F_1(x)},$$

si l'on applique la même méthode au second terme de l'expression [1], on pourra le mettre sous la forme

[2] $$\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\frac{f_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2}F_1(x)};$$

A_1 étant une constante qui peut être nulle, et $f_2(x)$ une fonction entière.

On pourra de même décomposer $\frac{f_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2}F_1(x)}$ en une somme de la forme

[3] $$\frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-2}}+\frac{f_3(x)}{(x-a)^{\alpha-3}F_1(x)},$$

et, en continuant ainsi, on voit que la fraction proposée $\frac{f(x)}{F(x)}$ peut être mise sous la forme

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)}+\frac{f_\alpha(x)}{F_1(x)}.$$

$A, A_1, \ldots A_{\alpha-1}$ étant des constantes finies et déterminées dont la première n'est pas nulle et $f_\alpha(x)$ une fonction entière.

Digitized by Google

Soit maintenant b une seconde racine de $F(x)=0$, et β son degré de multiplicité, en sorte que l'on ait

$$F_1(x)=(x-b)^\beta F_2(x),$$

en appliquant la méthode précédente à la fraction $\frac{f_\alpha(x)}{F_1(x)}$ on obtiendra une expression de la forme

$$\frac{f_\alpha(x)}{F_1(x)}=\frac{B}{(x-b)^\beta}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\dots+\frac{B_{\beta-1}}{(x-b)}+\frac{f_\beta(x)}{F_2(x)},$$

$B, B_1, \dots B_{\beta-1}$ étant des constantes déterminées, et $f_\beta(x)$ une fonction entière. Il résulte de là qu'en général si on suppose

$$F(x)=(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\dots(x-c)^\gamma;$$

la fraction $\frac{f(x)}{F(x)}$ pourra être décomposée de la manière suivante

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{F(x)}=&\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\dots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}\\&+\frac{B}{(x-b)^\beta}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\dots+\frac{B_{\beta-1}}{x-b}\\&\vdots\\&+\frac{C}{(x-c)^\gamma}+\frac{C_1}{(x-c)^{\gamma-1}}+\dots+\frac{C_{\gamma-1}}{x-c}+E(x),\end{aligned}$$

$A, A_1, \dots B, B_1,$ étant des constantes, et $E(x)$ une fonction entière.

La méthode précédente en prouvant la possibilité de cette décomposition, donne en même temps le moyen de l'effectuer.

La décomposition n'est possible que d'une seule manière.

397. Nous allons maintenant prouver qu'une fraction rationnelle ne peut être mise que d'une seule manière, sous la forme indiquée dans le paragraphe précédent.

Supposons, en effet, que l'on ait trouvé deux développements d'une même fraction rationnelle :

$$\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\dots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}+\frac{B}{(x-b)^\beta}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\dots+E(x),$$

et

$$\frac{A'}{(x-a)^{\alpha'}}+\frac{A_1'}{(x-a)^{\alpha'-1}}+\dots+\frac{A'_{\alpha'-1}}{x-a}+\frac{B'}{(x-b)^{\beta'}}+\dots+E'(x).$$

α et α' étant respectivement les exposants des plus hautes puis-

sances de $x-a$ dans les deux membres. Je dis que l'on doit avoir $\alpha=\alpha'$, $A=A'$. Supposons, en effet, s'il est possible, que l'un des deux exposants, α par exemple, soit plus grand que l'autre; tirons de l'équation qui exprime l'égalité des deux développements, la valeur de $\frac{A}{(x-a)^\alpha}$, et réduisons tous les autres termes au même dénominateur, on aura un résultat de la forme

$$\frac{A}{(x-a)^\alpha}=\frac{\varphi(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\psi(x)},$$

ou

$$A=(x-a)\frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

φ et ψ désignant des polynomes dont le second n'est pas divisible par $x-a$. D'ailleurs A est une constante, il faut donc qu'elle soit nulle, car l'équation précédente donne $A=0$ pour $x=a$. Je dis maintenant que $A=A'$; en effet, en égalant les développements et faisant passer le terme $\frac{A'}{(x-a)^\alpha}$ dans le premier membre, on pourra recommencer le raisonnement précédent et prouver que $A-A'$ doit être égal à zéro.

Les termes qui renferment les plus hautes puissances de $x-a$ dans les deux développements étant égaux entre eux, on pourra les supprimer de part et d'autre et les restes seront égaux. Il faudra, par conséquent, que les termes qui dans ces restes contiennent les plus hautes puissances de $x-a$, soient aussi égaux entre eux, et, en continuant ainsi, on prouvera que les fractions simples qui composent les deux développements, et, par suite, les parties entières $E(x)$, $E'(x)$ sont égales chacune à chacune.

Méthode pour le calcul des coefficients.

398. Lorsqu'on veut décomposer une fraction rationnelle en fractions simples, on peut employer un procédé plus simple que celui qui résulte de la méthode employée plus haut (**396**).

Soit $$\frac{f(x)}{F(x)}$$

la fraction proposée. On commencera par diviser le numérateur

Digitized by Google

par le dénominateur afin d'extraire la partie entière $E(x)$ et il restera une fraction

$$\frac{f_1(x)}{F(x)},$$

dans laquelle le degré de $f_1(x)$ sera moindre que celui de $F(x)$.

Soit a une racine entrant α fois dans $F(x)$ et $F(x)=(x-a)^\alpha F_1(x)$.

On posera

$$\frac{f_1(x)}{F(x)}=\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}+\frac{\varphi(x)}{F_1(x)},$$

ou, en multipliant les deux membres par $F(x)$,

$$f_1(x)=AF_1(x)+A_1F_1(x)(x-a)+\ldots+A_{\alpha-1}(x-a)^{\alpha-1}F_1(x)+(x-a)^\alpha\varphi(x)$$

Si l'on fait $x=a$ dans cette équation, et dans celles que l'on obtient en prenant $\alpha-1$ fois de suite la dérivée des deux membres, on formera α équations du premier degré, qui feront connaître $A, A_1, \ldots A_{\alpha-1}$; la première de ces équations donnera A. A étant connu, la seconde équation donnera A_1, la troisième fera connaître A_2, et ainsi de suite; de sorte que chaque coefficient sera donné par une équation à une inconnue.

Un procédé tout semblable ferait connaître les numérateurs des fractions qui dépendent d'une seconde racine b, et ainsi de suite.

Exemple. Soit la fraction

$$\frac{2x+1}{(x-1)^3x(x+1)^2};$$

cherchons les termes qui, dans la décomposition de cette fraction, ont pour dénominateurs les puissances de $x-1$; posons

[1] $$\frac{(2x+1)}{(x-1)^3x.(x+1)^2}=\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{f_1(x)}{x(x+1)^2},$$

ou, en chassant les dénominateurs,

[2] $$2x+1=A(x)(x+1)^2+A_1x(x-1)(x+1)^2+A_2x(x-1)^2(x+1)^2 +f_1(x)(x-1)^3.$$

Si l'on fait, dans cette équation, $x=1$, il vient

$$3=4A,$$

$$A=\frac{3}{4}.$$

En prenant la dérivée des deux membres, il vient

$$[3]\ 2 = A_1(x+1)^2 + 2Ax(x+1) + A_1(x-1)(x+1)^2 + A_1x(x+1)^2 + 2A_1x.(x-1)(x+1) + A_2(x-1)^2(x+1)^2 + 2A_2x(x-1)(x+1)^2 + 2A_2x(x-1)(x+1)^2 + 2A_2x(x-1)^2(x+1) + f_1'(x)(x-1)^3 + 3f_1(x)(x-1)^2.$$

Si l'on fait $x=1$, il vient

$$2 = 4A + 4A + 4A_1,$$

d'où l'on déduit $\quad A_1 = \frac{2-8A}{4} = -1.$

Si l'on prend encore la dérivée des deux membres de [3], il vient

$$0 = 2A(x+1)+2A(x+1)+2Ax+A_1(x+1)^2+2A_1(x-1)(x+1) + A_1(x+1)^2+2A_1x(x+1)+2A_1(x-1)(x+1) + 2A_1x.(x+1)+2A_1x.(x-1)+2A_2(x-1)(x+1)^2 + 2A_2(x-1)^2(x+1)+2A_2(x-1)(x+1)^2+2A_2x(x+1)^2 + 4A_2x(x-1)(x+1)+2A_2(x-1)^2(x+1) + 4A_2x(x-1)(x+1)+2A_2x(x-1)^2+f_1''(x)(x-1)^3 + 3f_1'(x)(x-1)^2+3f_1'(x)(x-1)^2+6f_1(x)(x-1).$$

Si l'on fait, dans cette équation, $x=1$, elle se réduit à

$$0 = 10A + 16A_1 + 4A_2,$$

d'où l'on déduira la valeur de A_2 :

$$A_2 = -\frac{10A + 16A_1}{4} = 8{,}50,$$

et l'on a, par suite,

$$\frac{2x+1}{(x-1)^3x(x+1)^2} = \frac{3}{4(x-1)^3} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{8{,}5}{x-1} + \frac{f_1(x)}{x.(x-1)^2}.$$

On déterminerait de la même manière les fractions qui complètent le développement.

Cas des racines imaginaires égales.

399. La méthode que nous venons d'exposer ne suppose

Digitized by Google

nullement que les racines multiples de l'équation proposée soient réelles. On doit remarquer seulement que si elles étaient imaginaires, on pourrait, dans le résultat, grouper les termes deux par deux, de manière à faire disparaître les imaginaires; mais il sera plus simple d'adopter, dans ce cas, une forme de développement dont la possibilité résulte du théorème suivant :

THÉORÈME. *Si le dénominateur d'une fraction rationnelle* $\frac{f(x)}{F(x)}$ *admet* n *fois une racine imaginaire* $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ *et la conjuguée* $\alpha-\beta\sqrt{-1}$, *en sorte que l'on ait*

$$F(x)=(x-\alpha-\beta\sqrt{-1})^n(x-\alpha+\beta\sqrt{-1})^n F_1(x)=[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n F_1(x),$$

on pourra toujours poser

$$[1]\qquad \frac{f(x)}{F(x)}=\frac{Px+Q}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}+\frac{f_1(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}F_1(x)},$$

P et Q étant des constantes, et $f_1(x)$ un polynome réel.

On a, en effet, identiquement

$$[2]\qquad \frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n F_1(x)}=\frac{Px+Q}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}+\frac{f(x)-(Px+Q)F_1(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n F_1(x)}.$$

Or, on peut évidemment déterminer P et Q de manière que le numérateur de la deuxième partie du second membre s'annule pour les hypothèses :

$$x=\alpha+\beta\sqrt{-1},\quad x=\alpha-\beta\sqrt{-1},$$

et soit, par conséquent, divisible par $(x-\alpha)^2+\beta^2$.

Si l'on suppose, en effet,

$$f(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})=M\pm N\sqrt{-1},$$

$$F_1(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})=M'\pm N'\sqrt{-1},$$

la condition demandée équivaudra à

$$(M\pm N\sqrt{-1})-[P(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})+Q](M'\pm N'\sqrt{-1})=0;$$

et en égalant à zéro le coefficient de $\sqrt{-1}$ et l'ensemble des termes réels, on obtiendra deux équations qui fourniront, pour P et Q, des valeurs réelles :

Le numérateur $f(x) - (Px + Q)F_1(x)$ étant divisible par $(x-\alpha)^2 + \beta^2$, on peut le représenter par $[(x-\alpha)^2 + \beta^2]f_1(x)$, et l'équation [2] devient alors

$$[3] \qquad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{Px+Q}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n} + \frac{f_1(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}F_1(x)}.$$

Si l'on applique le même procédé de décomposition à la fraction $\frac{f_1(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}F_1(x)}$, on la mettra sous la forme

$$\frac{P_1x+Q_1}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-2}F_1(x)},$$

et en continuant de la même manière, on verra que la fraction

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

peut se décomposer de la manière suivante :

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{Px+Q}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n} + \frac{P_1x+Q_1x}{[(x-\alpha)^2+B^2]^{n-1}} + \dots$$
$$+ \frac{P_{n-1}x+Q_{n-1}}{(x-a)^2+\beta^2} + \frac{f_{n-1}(x)}{F_1(x)}.$$

En rapprochant ce résultat de celui qui a été obtenu (**396**), on obtient le théorème suivant :

400. Théorème. *Si l'on décompose le polynome* F(x) *en facteurs réels du premier et du second degré, en sorte que l'on ait*

$$F(x) = (x-a)^\alpha(x-b)^\beta\dots(x^2+px+q)^n\dots(x^2+rx+s)^m,$$

on pourra décomposer la fraction rationnelle $\frac{f(x)}{F(x)}$ *de la manière suivante :*

$$\frac{F(x)}{f(x)} = Ex + \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)}$$
$$+ \frac{B}{(x-b)^\beta} + \dots + \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n}$$
$$+ \frac{P_1x+Q_1}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \dots + \frac{P_{n-1}x+Q_{n-1}}{(x^2+px+q)}$$
$$+ \frac{Rx+S}{(x^2+rx+S)^m} + \dots + \frac{R_{m-1}x+S_{m-1}}{x^2+rx+S},$$

Digitized by Google

$E(x)$ désignant une partie entière qui peut être nulle, et A, A_1, $A_{\alpha-1}$, P, Q ... des constantes réelles.

Le procédé qui nous a servi à prouver la possibilité de la décomposition donne aussi le moyen de l'effectuer, et on pourra l'appliquer pour former les termes qui correspondent aux facteurs du second degré : x^2+px+q, x^2+rx+s...

401. On pourrait démontrer comme nous l'avons fait (**397**), que la décomposition en fraction de la forme indiquée précédemment n'est jamais possible que d'une seule manière, et déduire de là un moyen de trouver, par la méthode des coefficients indéterminés, les fractions qui répondent à une racine donnée. Mais nous supprimons ces détails, qui ne présentent ni difficulté ni intérêt.

RÉSUMÉ.

392. But de ce chapitre. — **393.** Cas où le dénominateur de la fraction à décomposer n'a pas de racines égales. — **394.** Transformation du résultat dans le cas où il y a des racines imaginaires. — **395-396.** Cas des racines égales. — **397.** La décomposition sous la forme précédente n'est possible que d'une seule manière. — **398.** Méthode pour calculer les coefficients. — **399.** Cas des racines imaginaires égales. — **400.** Théorème général qui résume la théorie exposée dans ce chapitre.

EXERCICE.

Si $\varphi(x)=0$ est une équation de degré n, et a, b, c ..., k, l ses racines, on a pour toute valeur de p plus petite que $n-1$:

$$0=\frac{a^p}{\varphi'(a)}+\frac{b^p}{\varphi'(b)}+\dots+\frac{l^p}{\varphi'(l)}.$$

NOTE 4.

SUR LA RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DE DEUX ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ.

---

402. Nous commencerons par résoudre la question suivante : *Quelle est la condition pour qu'une équation du second degré*

$$[1] \qquad Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

fournisse pour l'inconnue y *une valeur de la forme* Mx + N, M *et* N *étant des facteurs indépendants de* x.

On déduit de l'équation [1] en la considérant comme une équation du second degré en y,

$$[2] \; y = -\frac{Bx + D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{(B^2 - 4AC)x^2 + 2(BD - 2AE)x + D^2 - 4AF},$$

pour que cette valeur de y soit de la forme demandée, il est nécessaire et suffisant que le polynome placé sous le radical

$$(B^2 - 4AC)x^2 + 2(BD - 2AE)x + D^2 - 4AF,$$

soit un carré parfait, et, pour cela, on doit avoir

$$(BD - 2AE)^2 = (B^2 - 4AC)(D^2 - 4AF),$$

ou, en supprimant les termes B^2D^2 qui figurent dans les deux membres, et divisant ensuite par le facteur commun $4A$,

$$[3] \qquad -BDE + AE^2 = 4ACF - FB^2 - CD^2,$$

telle est la condition demandée. Si elle est remplie, la valeur de y prend la forme

$$[4] \; y = -\frac{Bx + D}{2A} \pm \frac{1}{-2A}\left(x\sqrt{B^2 - 4AC} + \frac{BD - 2AE}{\sqrt{B^2 - AC}}\right).$$

403. Proposons-nous actuellement de résoudre le système de deux équations numériques du second degré

$$[1] \qquad Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

$$[2] \qquad A'y^2 + B'xy + C'x^2 + D'y + E'x + F' = 0.$$

Si nous ajoutons ces deux équations, après avoir multiplié la première par λ, le résultat pourra remplacer l'une d'elles. On obtient ainsi

$$[3] \qquad (A\lambda + A')\,y^2 + (B\lambda + B')\,xy + (C\lambda + C')\,x^2 + (D\lambda + D')y + (E\lambda + E')\,x + F\lambda + F' = 0.$$

La quantité λ étant arbitraire, nous pouvons la déterminer par la condition que les valeurs de y déduites de l'équation [3] soient du premier degré en x.

Il suffira (**402**) de poser

$$-(B\lambda+B')(D\lambda+D')(E\lambda+E')+(A\lambda+A')(E\lambda+E')^2$$
$$=4(A\lambda+A')(C\lambda+C')(F\lambda+F')-(F\lambda+F')(B\lambda+B')^2$$
$$-(C\lambda+C')(D\lambda+D')^2,$$

équation du troisième degré en λ qui aura par conséquent une racine réelle au moins. On calculera cette racine par approximation, et en faisant usage de la formule [4] (**402**). On obtiendra alors pour y, deux valeurs de la forme

$$y = Mx + N,$$
$$y = M_1x + N_1;$$

M, N, M_1, N_1, étant connus en fonction de la racine λ, en substituant successivement ces valeurs de y dans l'une des équations [1] et [2], on obtiendra deux équations du second degré en x; il y aura par conséquent, en tout, quatre valeurs pour x et autant pour y.

Moyen d'approcher des racines.

404. La racine de l'équation en λ ne pouvant se calculer que par approximation, les valeurs trouvées pour x et y ne seront pas rigoureusement exactes. Il existe un moyen d'obtenir des valeurs de plus en plus approchées, qui s'applique à des équations de degré quelconque.

Soient deux équations $F(x, y) = 0$, $f(x, y) = 0$ et α et β des valeurs approchées de x et y; désignons par $\alpha + h$ et $\beta + k$ les valeurs véritables, on aura

$$f(\alpha + h, \beta + k) = 0,$$
$$F(\alpha + h, \beta + k) = 0.$$

Or, on a évidemment

$$f(\alpha + h, \beta + k) = f(\alpha, \beta + k) + hf'_\alpha(\alpha, \beta + k) + \ldots$$
$$f(\alpha, \beta + k) = f(\alpha, \beta) + kf'_\beta(\alpha, \beta) + \ldots,$$
$$f'_\alpha(\alpha, \beta + k) = f'_\alpha(\alpha, \beta) + \ldots;$$

d'où l'on déduit

$$f(\alpha + h, \beta + k) = f(\alpha, \beta) + hf'_\alpha(\alpha, \beta) + kf'_\beta(\alpha, \beta) + \ldots.$$

les termes que nous n'écrivons pas contenant en facteurs des puissances de h ou k, ou des produits de ces quantités.

On aura donc en négligeant ces termes comme très-petits

$$[1] \qquad f(\alpha, \beta) + hf'_\alpha(\alpha, \beta) + kF'_\beta(\alpha, \beta) = 0;$$

on trouverait de même

$$[2] \qquad F(\alpha, \beta) + hF'_\alpha(\alpha, \beta) + kF'_\beta(\alpha, \beta) = 0;$$

les équations [1] et [2] fourniront pour h et k des valeurs qui évidemment diffèrent peu des véritables.

En prenant pour point de départ les valeurs $\alpha + h = \alpha_1$ et $\beta + k = \beta_1$, et posant $x = \alpha_1 + h_1$, $y = \beta_1 + k_1$, on trouverait encore des valeurs approchées de h_1 et k_1, et ainsi de suite.

Digitized by Google

NOTE 5.

SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.

Considérons n équations à n inconnues:

$$[1]\left\{\begin{array}{l} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_ix_i + \ldots + a_nx_n = l_1, \\ a_1^2x_1 + a_2^2x_2 + a_3^2x_3 + \ldots + a_i^2x_i + \ldots + a_n^2x_n = l_2, \\ \vdots \\ a_1^kx_1 + a_2^kx_2 + \ldots + a_i^kx_i + \ldots + a_n^kx_n = l_k, \\ \vdots \\ a_1^nx_1 + a_2^nx_2 + \ldots + a_i^nx_i + \ldots + a^n_nx_n = l_n, \end{array}\right.$$

a_1, $a_2 \ldots a_n$, a_1^2, $a_2^2 \ldots a_i^k \ldots a_n^n$ désignant des coefficients quelconques tout à fait indépendants les uns des autres. a^2_1 n'est, par exemple, nullement égal au carré de a_1, et le chiffre 2 n'y figure que comme un indice. En général, a_i^k n'a aucune liaison avec a_i, et n'en est nullement la puissance k. Cela posé, considérons le produit

$$P = a_1a_2a_3\ldots a_n(a_2-a_1)(a_3-a_1)\ldots(a_i-a_1)\ldots(a_n-a_1)(a_3-a_2)(a_i-a_2)\ldots$$
$$(a_i-a_2)\ldots(a_n-a_2)(a_i-a_3)\ldots(a_n-a_3)\ldots(a_n-a_{n-1}),$$

obtenu en faisant le produit de tous les coefficients de la première équation par leurs différences deux à deux, en ayant soin de prendre, avec le signe —, dans chaque différence, le terme affecté du plus petit indice. Ce produit P se composera d'un grand nombre de termes dans lesquels les quantités a_1, $a_2 \ldots a_n$ auront divers exposants. Nommons R ce qu'il devient lorsque l'on considère les exposants comme des indices supérieurs. R contiendra alors les différents coefficients du système d'équation proposé, et chacun d'eux figurera, dans chaque terme, au premier degré, puisque, par hypothèse, nous avons remplacé les exposants par des indices. Si, par exemple, la puissance k

Digitized by

de a_i figure dans le produit P, nous la remplacerons, pour obtenir R, par a_i^k, coefficient de x_i dans l'équation de rang k; en sorte que les deux expressions P et R s'écriront de même, mais représenteront des valeurs très-différentes.

Supposons maintenant que l'on rassemble, en un seul, tous les termes de R, qui contiennent a_i affecté du même indice supérieur, R prendra la forme

$$[2] \quad R = A_i^1 a_i^1 + A_i^2 a_i^2 + A_i^3 a_i^3 + \ldots + A_i^k a_i^k + \ldots + A_i^n a_i^n,$$

A_i^1, $A_i^2 \ldots A_i^n$ étant des sommes de produits dans lesquels ne figure évidemment aucune des quantités

$$a_i^1, \ a_i^2 \ldots a_i^n.$$

Je dis maintenant qu'on a les équations suivantes :

$$[3] \quad \left\{\begin{array}{l} 0 = A_i^1 a_1 + A_i^2 a_1^2 + A_i^3 a_1^3 + \ldots + A_i^n a_1^n, \\ 0 = A_i^1 a_2 + A_i^2 a_2^2 + A_i^3 a_2^3 + \ldots + A_i^n a_2^n, \\ \vdots \\ 0 = A_i^1 a_k + A_i^2 a_k^2 + A_i^3 a_k^3 + \ldots + A_i^n a_k^n, \\ \vdots \\ 0 = A_i^1 a_n + A_i^2 a_n^2 + A_i^3 a_n^3 + \ldots + A_i^n a_n^n, \end{array}\right.$$

ou, en d'autres termes, que l'expression R s'annule, si l'on y remplace, dans tous les termes, l'indice inférieur i de la lettre a par une autre valeur quelconque 1, 2, ... k ... n. En effet, l'expression P renfermant en facteur $(a_1 - a_i)(a_2 - a_i)\ldots(a_n - a_i)$, s'annule identiquement si l'on suppose, par exemple, $a_i = a_k$: le résultat de cette substitution doit être zéro, indépendamment de toute valeur attribuée aux lettres $a_1, a_2, \ldots a_n$. Les termes doivent donc se détruire identiquement, et être égaux deux à deux et de signes contraires; or, il est évident que cette identité ne sera pas altérée quand on considérera les exposants comme des indices, afin de passer de l'expression P à l'expression R.

Les équations [3] étant démontrées, on obtiendra évidemment la valeur de x_i en multipliant les équations proposées par A_i^1, $A_i^2 \ldots A_i^n$, et les ajoutant. Les coefficients de $x_1, x_2 \ldots x_{i-1}$, $x_{i+1} \ldots x_n$ deviendront, en effet, égaux à zéro, en vertu des équations [3], et le coefficient de x_i deviendra égal à R en vertu de [2].

Digitized by Google

On aura donc

$$Rx_i = A_i^1 l_1 + A_i^2 l_2 + \dots + A_i^n l_n,$$

d'où

$$x_i = \frac{A_i^1 l_1 + A_i^2 l_2 + \dots + A_i^n l_n}{R}.$$

On obtiendrait de même la valeur d'une inconnue quelconque. On voit que toutes ces valeurs ont le même dénominateur R. Si R n'est pas nul, chaque inconnue a une valeur unique et déterminée, et le système des équations ne présente aucune particularité. L'étude de l'expression R conduit à une théorie importante d'analyse algébrique que nous ne pouvons indiquer ici.

Digitized by Google

NOTE 6.

SUR LA RÉSOLUTION DE L'EQUATION $ax^2+bx+c=0$, LORSQUE a EST TRÈS-PETIT.

La formule générale qui donne les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$,

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac},$$

se prête mal aux calculs numériques, lorsque le coefficient a a une valeur très-petite. On comprend, en effet, qu'après avoir calculé approximativement $\sqrt{b^2 - 4ac}$, en divisant le résultat par $2a$, on diviserait en même temps l'erreur qui se trouverait par là considérablement augmentée. Il est donc convenable de modifier dans ce cas la formule qui donne les racines; occupons-nous seulement de la racine qui diffère peu de $-\frac{c}{b}$ (91), l'autre se trouvera ensuite, sans peine, puisque la somme des deux est connue et égale à $-\frac{b}{a}$.

De l'équation $$ax^2 + bx + c = 0,$$
on déduit

[1] $$x = -\frac{c}{b} - \frac{ax^2}{b},$$

a, étant par hypothèse très-petit, nous pouvons négliger $\frac{ax^2}{b}$, et écrire comme *première approximation*

[2] $$x = -\frac{c}{b},$$

l'erreur commise en adoptant cette valeur est $\frac{ax^2}{b}$; elle contient

en facteur la première puissance de a, et l'on dit, pour cette raison, qu'elle est du premier ordre.

Si nous désignons par α_1 l'erreur commise quand on prend $x=-\frac{c}{b}$, nous aurons exactement

$$[3] \qquad x=-\frac{c}{b}+\alpha_1;$$

en remettant cette valeur dans le second membre de l'équation [1], il vient

$$[4] \quad x=-\frac{c}{b}-\frac{a}{b}\left(-\frac{c}{b}+\alpha_1\right)^2=-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}+\frac{2a\alpha_1 c}{b^2}-\frac{\alpha_1^2 a}{b};$$

si nous négligeons, dans le second membre, le troisième et le quatrième terme qui contiennent en facteurs $a\alpha_1$ et α_1^2, il viendra *comme seconde approximation*

$$[5] \qquad x=-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3};$$

α_1 étant du premier ordre par rapport à a, $a\alpha_1$ et $\alpha_1^2 a$ sont respectivement du second et du troisième ordre, c'est-à-dire qu'ils contiennent a^2 et a^3 en facteur. Notre seconde approximation, fournie par la formule [5], ne laisse donc subsister que des erreurs du second ordre, et, si nous posons, par conséquent,

$$[6] \qquad x=-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}+\alpha_2,$$

α_2 sera du second ordre, c'est-à-dire que son expression contiendrait a^2 en facteur

Si nous remettons dans le second membre de la formule [1] la valeur de x fournie par la formule [6], il vient :

$$[7] \qquad x=-\frac{c}{b}-\frac{a}{b}\left(-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}+\alpha_2\right)^2;$$

ou, en développant

$$[8] \quad x=-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}-\frac{2a^2c^3}{b^5}-\frac{a^3c^4}{b^7}+2\alpha_2\frac{a}{b}\left(\frac{c}{b}+\frac{ac^2}{b^3}\right)-\frac{\alpha_2^2 a}{b},$$

α_2 étant du *second ordre* (c'est-à-dire contenant a^2 en facteur),

$x_2 a$ et $\frac{x_2^2 a}{b}$ seront du troisième et du cinquième ordre. Si nous négligeons les termes qui les contiennent, ainsi que $\frac{a^3c^4}{b^7}$, qu'il n'y a dès lors aucune raison pour conserver, il vient comme *troisième approximation*,

$$x=-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}-\frac{2a^2c^3}{b^5}.$$

Il serait facile de continuer ainsi indéfiniment.

Remarque. Les formules d'approximations successives :

$$x=-\frac{c}{b}$$

$$x=-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}$$

$$x=-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}-\frac{2a^2c^3}{b^5},$$

satisfont aux conditions que l'on doit toujours s'efforcer d'obtenir dans un système d'approximations successives :

1° Chacune s'obtient de la précédente par l'addition d'un terme de correction ;

2° L'erreur qui subsiste après l'addition de chacun des termes, est toujours *très-petite* par rapport à ce terme.

En effet, quand on écrit $x=-\frac{c}{b}$, l'erreur commise contient a en facteur, et est, par suite, très-petite par rapport à $-\frac{c}{b}$.

Quand on écrit $x=-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}$,

l'erreur commise contient a^2 en facteur et est très-petite par rapport à $\frac{ac^2}{b^3}$.

Quand on écrit enfin

$$x=-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}-\frac{2a^2c^3}{b^5}$$

l'erreur commise contient a^3 en facteur; elle est, par conséquent, très-petite par rapport à $\frac{2ac^2}{b^3}$.

APPLICATION. En résolvant un problème relatif à la profondeur d'un puits, nous avons trouvé (**92**) l'équation

$$\frac{x^2}{v^2}-x\left(\frac{2t}{v}+\frac{2}{g}\right)+t^2=0.$$

Dans cette équation, v représente la vitesse du son, égale à 343 environ; le carré v^2 est donc un nombre assez considérable, et $\frac{1}{v^2}$, coefficient de x^2, est très-petit. Il y a donc lieu d'appliquer les formules précédentes; en adoptant la première, il viendra

$$(a)\qquad x=\frac{t^2}{\frac{2}{g}+\frac{2t}{v}},$$

dont on devra se servir dans les applications, car on peut, sans aucun inconvénient, négliger les quantités de l'ordre $\frac{1}{v^2}$ ($\frac{1}{100000}$ environ, et l'unité de longueur est le mètre).

La formule (a) peut, du reste, se simplifier un peu si l'on remarque que v étant grand, $\frac{2t}{v}$ est petit; en sorte qu'en le négligeant dans une première approximation on peut écrire

$$x=\frac{gt^2}{2}:$$

c'est la formule qui conviendrait, en supposant la vitesse du son infinie. Pour obtenir un terme de correction, posons

$$x=\frac{gt^2}{2}+\alpha.$$

Nous aurons, pour déterminer α,

$$\frac{t^2}{\frac{2}{g}+\frac{2t}{v}}=\frac{gt^2}{2}+\alpha;$$

d'où

$$0=\frac{2\alpha}{g}+\frac{gt^3}{v}+\frac{2t\alpha}{v}.$$

Digitized by Google

Négligeant $\frac{\alpha t}{v}$, qui est à la fois très-petit à cause du facteur α et du facteur $\frac{1}{v}$, on en déduit

$$\alpha = -\frac{g^2t^3}{2v},$$

et l'on a enfin, comme valeur approchée de x,

$$x = \frac{gt^2}{2} - \frac{g^2t^3}{2v}.$$

Nous terminerons cette note en indiquant quelques formules d'approximation souvent utiles et dont le lecteur trouvera sans peine la démonstration.

Si x désigne un nombre très-petit, on a, *approximativement*,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \tfrac{1}{2}x$$

$$\sqrt[m]{1+x} = 1 + \frac{x}{m}$$

$$(1+x)^{\frac{m}{n}} = 1 + \frac{m}{n}x.$$

L'erreur commise dans chacune de ces formules est de l'ordre du carré de x.

FIN.

Digitized by Google

TABLE DES CHAPITRES.

Pages.

Explication des signes algébriques. 1
Chapitre premier. Notions préliminaires ; addition et soustraction algébriques. 3
Chap. II. Multiplication algébrique. 14
Chap. III. Calcul des radicaux ; exposants négatifs et fractionnaires. 27
Chap. IV. Équation du premier degré à une inconnue. 38
Chap. V. Résolution d'un nombre quelconque d'équations du premier degré entre un nombre quelconque d'inconnues. 50
Chap. VI. Discussion des formules trouvées dans les deux chapitres précédents. 61
Chap. VII. Solutions négatives des équations du premier degré. 68
Chap. VIII. Équations du second degré. 79
Chap. IX. Équations qui se ramènent à celles du second degré. 93
Chap. X. Théorie des inégalités. 104
Chap. XI. Quelques questions de maximum ou minimum. 117
Chap. XII. Division des polynomes. 126
Chap. XIII. Combinaisons et formule du binome. 137
Chap. XIV. Racines des polynomes. 147
Chap. XV. Méthode des coefficients indéterminés. 157
Chap. XVI. Vérification des formules d'algèbre. 164
Chap. XVII. Sur les expressions imaginaires. 170
Chap. XVIII. Théorie des fractions continues. 182
Chap. XIX. Analyse indéterminée du premier degré. 198
Chap. XX. Des équations exponentielles et des logarithmes. 231
Chap. XXI. Sur les expressions qui se présentent sous une forme indéterminée. 257

Note 1. Sur la théorie des intérêts composés et les annuités. 269
Note 2. Sur les fonctions symétriques. 274
Note 3. Sur la théorie des approximations. 279

SOLUTIONS DES EXERCICES.

Chapitre premier. 289
Chapitre II. 291
Chapitre III. 296
Chapitre IV. 297
Chapitre V. 305
Chapitre VI. 313
Chapitre VII. 316
Chapitre VIII. 320

Digitized by Google

Pages.
CHAPITRE IX. 327
CHAPITRE X. 340
CHAPITRE XI. 347
CHAPITRE XII. 352
CHAPITRE XIII. 357
CHAPITRE XIV. 370
CHAPITRE XV. 372
CHAPITRE XVI. 375
CHAPITRE XVII. 381
CHAPITRE XVIII. 386
CHAPITRE XIX. 393
CHAPITRE XX. 398
CHAPITRE XXI. 399

NOTE 1. 401
NOTE 2. 402
NOTE 3. 403

APPENDICE.

CHAPITRE XXII. Notions sur les séries. 405
CHAP. XXIII. Théorie des fonctions dérivées. 413
CHAP. XXIV. Séries qui servent au calcul logarithmique. 430
CHAP. XXV. Notions générales sur la résolution des équations numériques. 436
CHAP. XXVI. Notions générales sur les moyens de reconnaître l'existence des racines réelles. 445
CHAP. XXVII. Théorie des racines égales. 451
CHAP. XXVIII. Théorème de Descartes. 457
CHAP. XXIX. Racines commensurables. 464
CHAP. XXX. Notions sur la théorie des différences. 471
CHAP. XXXI. Résolution des équations numériques. 508
CHAP. XXXII. Décomposition des fractions rationnelles. 516

NOTE 4. Sur la résolution numérique de deux équations du second degré. 527
NOTE 5. Sur la résolution des équations du premier degré. 530
NOTE 6. Sur la résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = o$, lorsque a est très-petit. 533

FIN DE LA TABLE DES CHAPITRES.

Digitized by Google

ERRATA.

Page 25, ligne 6, en remontant : *ajoutez* $(1-t)$.
id., 7, en remontant : *ajoutez* $(1+t)$.
62, 15 : qu'elle a ; *lisez* que l'équation proposée a.
67, 16 : dans un ; *ajoutez* temps.
id., 17 : du : *lisez* de.
81, 6, en remontant : relations entre les racines ; *lisez* relations entre les racines et les coefficients.
92, Exercice XVII : au dénominateur a^2+b^2 ; *lisez* a^2-b^2.
100, Avant-dernière ligne : $165(s^2+3x^2)-125y$; *lisez* $16s(s^2+3x^2)12sy$.
103, Exercice XXIII : au premier terme $(1+x^2)$; *lisez* $(1-x^2)$
127, Les trois dernières lignes du paragraphe 124 doivent être placées à la fin du paragraphe 123.
128, 19 : gauche ; *lisez* droite.
136, 1 : algébrique ; *lisez* arithmétique.
145, 9 : $n-3$; lisez $n-4$.
146, 3, en remontant : x_n ; lisez x_m.
155, 4, en remontant : z^2 ; lisez z.
168, Exercice I, ligne 2 ; lisez $xy-uv=2-2(u+v)$.
id. 3 : r^2 ; lisez r^2.
181, 1 : nombre premier plus grand que 3 ; *lisez* nombre impair premier avec 3.
197, 2 : $A-\alpha$; *lisez* $A-\alpha'$.
id., 4 : IV, *lisez* V.
id., 8 : V ; *effacez*.
285, 1 : (273) ; *lisez* (275).
302, 7 : en remontant : $\frac{2}{3}$; *lisez* $\frac{3}{2}$.
304, 9 : en remontant : $\pm$; *lisez* $=$.
318, 23 au lieu de : $mn(n-1)=(n-1)+x+n(n-1)(n+2x-)$; *lisez* $mn(n-1)=n-1+x(n-1)(n+2x-2)$.
325, 12 : R^2 ; *lisez* $-2R^2$.
342, 1 : égalité ; *lisez* inégalité.
id., 8 : h ; lisez h.
344, 18 : $d+R$; lisez $d-R$.
397, 3 : $x=\frac{\beta y^2+a\alpha}{y^2+a}$; lisez $x=\frac{\beta y^2-a\alpha}{y^2-a}$.

Digitized by Google

ADDITIONS.

Nous réunissons ici, sous le titre d'*Additions*, la réponse à diverses questions mentionnées dans les programmes universitaires de 1853, et qui ne sont pas suffisamment développées dans le texte de cet ouvrage.

I.

Sommation des piles de boulets.

Dans le chapitre consacré à l'étude de la théorie des différences, nous avons fait connaître les formules qui donnent les nombres de boulets contenus dans les piles de diverses formes; mais il est peut-être désirable que les élèves adoptent pour ces formules une démonstration plus élémentaire. La plus simple repose sur la solution préalable du problème suivant :

Trouver la somme des puissances m^{mes} *des termes d'une progression par différence.* Soit la progression :

$$a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots.\ k,\ l,$$

et r sa raison, on a

$$b=a+r,\quad c=b+r,\quad d=c+r,\ \ldots.\ l=k+r.$$

Élevons ces diverses équations à la puissance $m+1$, nous aurons

$$b^{m+1}=(a+r)^{m+1}=a^{m+1}+(m+1)a^m r+\frac{(m+1)m}{2}a^{m-1}r^2+\ldots+r^{m+1},$$

$$c^{m+1}=(b+r)^{m+1}=b^{m+1}+(m+1)b^m r+\frac{(m+1)m}{2}b^{m-1}r^2+\ldots+r^{m+1},$$

$$\vdots$$

$$l^{m+1}=(k+r)^{m+1}=k^{m+1}+(m+1)k^m r+\frac{(m+1)m}{2}k^{m-1}r^2+\ldots+r^{m+1},$$

ajoutant toutes ces équations, il vient, en désignant généralement par S_μ la somme $a^\mu+b^\mu+\ldots+k^\mu$, et par p le nombre des termes $a,\ b,\ c,\ldots k$,

$$l^{m+1}=a^{m+1}+(m+1)r\,S_m+\frac{(m+1)m}{1.2}r^2\,S_{m-1}$$
$$+\frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3}r^3\,S_{m-2}+\ldots+pr^{m+1}.$$

Digitized by Google

Le nombre total est, d'après cela,

$$N = \frac{n^2+n}{2} + \frac{(n-1)^2+(n-1)}{2} + \frac{(n-2)^2+(n-2)}{2} + \ldots + \frac{1^2+1}{2},$$

ce que l'on peut écrire de la manière suivante :

$$N = \frac{n^2+(n-1)^2+(n-2)^2+\ldots+1^2}{2} + \frac{n+(n-1)+(n-2)+\ldots+1}{2},$$

ou, en vertu des formules écrites plus haut,

$$N = \frac{n.(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n.(n+1)}{4} = \frac{n.(n+1)(2n+1+3)}{12}$$
$$= \frac{n.(n+1)(n+2)}{6},$$

telle est la formule qui exprime le nombre des boulets contenus dans une pile triangulaire.

Pile à base carrée. La base d'une pareille pile est formée par des boulets rangés en carré, dont le nombre total est n^2, n désignant le nombre de ceux qui sont contenus dans le côté de ce carré. La seconde tranche contiendra $(n-1)^2$ boulets, la troisième $(n-2)^2$, etc., et enfin la dernière n'en contient qu'un. Le nombre total est donc

$$N = n^2 + (n-1)^2 + \ldots + 1 = \frac{n.(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Pile à base rectangulaire. La base d'une pareille pile est formée par des boulets rangés en rectangle. Si l'un des côtés de la base contient m boulets et l'autre côté n, le nombre total des boulets qui la composent sera mn. La tranche suivante est un rectangle, dont les côtés comprennent respectivement $(m-1)$ et $(n-1)$ boulets, elle en contient par conséquent un nombre égale à $(m-1)(n-1)$; la troisième tranche en contient de même $(m-2)(n-2)$, et ainsi de suite jusqu'à la dernière, qui est une file de $m-n+1$ boulets (si l'on suppose $m>n$). Le nombre total que nous cherchons est donc

$$N = mn + (m-1)(n-1) + (m-2)(n-2) + \ldots + (m-n+1)1.$$

Posons $(m-n)=p$: on aura évidemment $m=n+p$, et

$$N = n.(n+p)+(n-1)(n-1+p)+(n-2)(n-2+p)+\ldots+1(1+p),$$

c'est-à-dire

$$N = [n^2+(n-1)^2+(n-2)^2+\ldots+1] + p[n+(n-1)+\ldots+1],$$

ou, d'après les formules connues,

$$N = \frac{n.(n+1)(2n+1)}{6} + p.\frac{n.n+1}{2} = \frac{n.(n+1)(2n+3p+1)}{6}$$

Digitized by Google

II.

Dérivées des fonctions circulaires inverses.

1° Soit $y = \text{arc}\sin x$. On a $x = \sin y$. Désignons par y' la dérivée de y; $\sin y$ est une fonction de fonction ayant pour dérivée $y' \cos y$; on a donc

$$1 = y' \cos y, \quad \text{d'où} \quad y' = \frac{1}{\cos y},$$

ou

$$y' = \frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}}.$$

La dérivée y' n'est pas entièrement déterminée; la raison de ce fait est facile à trouver. L'expression $\text{arc}\sin x$ ne désigne pas seulement une fonction, mais une infinité de fonctions. Désignons effectivement par z un arc ayant x pour sinus, variant d'une manière continue avec x et s'annulant en même temps que lui; l'expression $\text{arc}\sin x$ représentera indifféremment l'une quelconque des fonctions qui sont comprises dans les deux formules

$$2k\pi + z, \quad (2k+1)\pi - z;$$

en désignant par z' la dérivée de z, les fonctions représentées par la première formule auront aussi z' pour dérivée, mais $-z'$ sera la dérivée des fonctions représentées par la seconde formule.

2° Soit $y = \text{arc}\cos x$. On a $x = \cos y$. Prenant les dérivées de chaque membre et dénotant par y' la dérivée de y, il vient

$$1 = -y' \sin y, \quad \text{d'où} \quad y' = \frac{1}{-\sin y},$$

ou

$$y' = \frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}}.$$

On expliquerait, comme nous l'avons fait dans le cas précédent, la double valeur de y'. Il faut remarquer que les fonctions $\text{arc}\cos x$ donnent lieu aux mêmes dérivées que les fonctions $\text{arc}\sin x$. Effectivement si z est l'un des arcs qui ont x pour sinus ou pour cosinus, $\frac{\pi}{2} - z$ sera l'un de ceux qui ont x pour cosinus ou pour sinus.

3° Soit $y = \text{arc}\,\text{tang}\, x$. On a $x = \text{tang}\, y$. Prenant les dérivées de chaque membre, il vient

$$1 = \frac{y'}{\cos^2 y}, \quad \text{d'où} \quad y' = \cos^2 y,$$

et

$$y' = \frac{1}{1+x}.$$

Ici la dérivée de y est entièrement déterminée. Cela tient à ce que toutes les valeurs de arc tang x s'obtiennent en ajoutant une constante à l'une quelconque d'entre elles.

4° Soit $y = \text{arc cotang}\, x$. On a $x = \text{cotang}\, y$, d'où

$$q = \frac{-y'}{\sin^2 y}, \quad y' = -\sin^2 y,$$

et

$$y' = \frac{-1}{1+x^2}.$$

Il est facile de montrer *a priori* que arc tang x et arc cotang x ont des dérivées égales et de signes contraires.

5° Soit $y = \text{arc séc}\, x$. On a $x = \text{séc}\, y$, d'où

$$1 = y' \frac{\sin y}{\cos^2 y}, \quad y' = \frac{\cos^2 y}{\text{n} y} = \frac{1}{\pm x\sqrt{x^2-1}}.$$

6° Soit $y = \text{arc coséc}\, x$. On a $x = \text{coséc}\, y$, d'où

$$1 = -\frac{y' \cos y}{\sin^2 y}, \quad y' = \frac{-\sin^2 y}{\cos y} = \frac{1}{\pm x\sqrt{x^2-1}}.$$

III.

Application de la théorie des dérivées au développement de log$(1+x)$ et de arc tang x en séries convergentes ordonnées suivant les puissances de x.

La démonstration, que nous avons donnée dans le texte, du développement de $l(1+x)$ en série est extrêmement simple, mais elle est sujette à quelques difficultés. Aussi croyons-nous devoir en présenter ici une autre, que nous appliquerons ensuite au développement de la fonction arc tang x.

Développement en série de $-\text{l}(1-\text{u})$ *où* u *est un nombre positif inférieur à* 1 *. Soit x une quantité que nous ferons varier depuis $x=0$ jusqu'à $x=u$; u est une constante positive inférieure à 1. Posons

[1] $$f(x) = -l(1-x);$$

la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$ a pour valeur $\frac{1}{1-x}$, et l'on peut écrire

[2] $$f'(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}.$$

Posons aussi

[3] $$\varphi(x) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n},$$

---

* La caractéristique l désigne les logarithmes népériens.

et désignons par $\varphi'(x)$ la dérivée du polynôme $\varphi(x)$, on aura

[4] $$\varphi'(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}.$$

En retranchant l'équation [4] de l'équation [2], il vient

$$f'(x) - \varphi'(x) = \frac{x^n}{1-x}.$$

Le second membre de cette équation est positif, et il est moindre que $\frac{x^n}{1-u}$, tant que x n'est pas égal à u; on a donc

[5] $$f'(x) - \varphi'(x) > 0,$$

[6] $$f'(x) - \varphi'(x) - \frac{x^n}{1-u} < 0.$$

Ces inégalités montrent que les fonctions $f(x) - \varphi(x)$ et $f(x) - \varphi(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-u)}$, sont, la première croissante, la deuxième décroissante, quand x croît de 0 à u. En effet, la première de ces fonctions a une dérivée constamment positive (inégalité 5), tandis que la deuxième a une dérivée constamment négative (inégalité 6). D'ailleurs les fonctions dont il s'agit sont nulles pour $x = 0$, donc, pour $x = u$, la première est positive et la deuxième est négative. Ainsi l'on a

$$f(u) - \varphi(u) > 0,$$

$$f(u) - \varphi(u) - \frac{u^{n-1}}{(n+1)(1-u)} < 0,$$

ou

$$f(u) > \varphi(u),$$

$$f(u) < \varphi(u) + \frac{u^{n+1}}{(n+1)(1-u)};$$

c'est-à-dire que $f(u)$ est égale à $\varphi(u)$ augmentée d'une quantité positive moindre que $\frac{u^{n+1}}{(n+1)(1-u)}$; cette quantité peut évidemment se représenter par $\frac{\theta u^{n+1}}{(n+1)(1-u)}$, en désignant par θ une quantité comprise entre 0 et 1. D'après cela on a

$$f(u) = \varphi(u) + \frac{\theta u^{n+1}}{(n+1)(1-u)},$$

ou

[7] $$-l(1-u) = \frac{u}{1} + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \ldots + \frac{u^n}{n} + \frac{\theta u^{n+1}}{(n+1)(1-u)}.$$

La quantité u étant inférieure à 1, on voit que $\frac{\theta u^{n+1}}{(n+1)(1-u}$

tend vers zéro à mesure que n augmente indéfiniment. On a donc

$$-l(1-u)=\frac{u}{1}+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+\dots$$

formule dont le second membre est une série convergente tant que l'on a $u<1$.

Développement en série de l(1 + u) *où* u *est un nombre positif égal ou inférieur à* 1. Soit x une quantité variable entre les limites 0 et u; u est une constante positive égale ou inférieure à 1. Posons

[1] $$f(x)=l(1+x);$$

la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$ a pour valeur $\frac{1}{1+x}$; et l'on peut écrire ces deux égalités:

[2] $$\left\{\begin{array}{l} f'(x)=1-x+x^2-x^3+\dots\pm x^{n-1}\mp\frac{x^n}{1+x}, \\ f'(x)=1-x+x^2-x^3+\dots\pm x^{n-1}\mp x^n\pm\frac{x^{n+1}}{1+x}. \end{array}\right.$$

Posons aussi

[3] $$\varphi(x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots\pm\frac{x^n}{n},$$

et désignons par $\varphi'(x)$ la dérivée du polynôme $\varphi(x)$; nous aurons

[4] $$\varphi'(x)=1-x+x^2-\dots\pm x^{n-1}.$$

En retranchant l'équation [4] de chacune des équations [2], on obtient

[5] $$f'(x)-\varphi'(x)=\mp\frac{x^n}{1+x},$$

[6] $$f'(x)-\varphi'(x)\pm x^n=\pm\frac{x^n}{1+x}.$$

Les seconds membres de ces deux équations sont de signes contraires; par conséquent les deux fonctions $f(x)-\varphi(x)$ et $f(x)-\varphi(x)\pm\frac{x^{n+1}}{n+1}$, ayant leurs dérivées de signes contraires, sont l'une croissante, l'autre décroissante quand x varie de 0 à u. Or, les deux fonctions dont il s'agit sont nulles pour $x=0$; donc pour $x=u$, elles sont de signes contraires. On a donc

$$f(u)-\varphi(u)>0,$$

$$f(u)-\varphi(u)\pm\frac{u^{n+1}}{n+1}<0;$$

ou
$$f(u)-\varphi(u)<0,$$
$$f(u)-\varphi(u)\pm\frac{u^{n+1}}{n+1}>0.$$

Dans les deux cas on peut écrire, en désignant par θ un nombre inférieur à 1,
$$f(u)=\varphi(u)\mp\frac{\theta u^{n+1}}{n+1};$$
c'est-à-dire

[7] $$l(1+u)=\frac{u}{1}-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\ldots\pm\frac{u^n}{n}\mp\frac{\theta u^{n+1}}{n+1}.$$

La quantité u étant égale ou inférieure à 1, $\frac{\theta u^{n+1}}{n+1}$ tend vers zéro à mesure que n augmente indéfiniment. On a donc

[8] $$l(1+u)=\frac{u}{1}-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\ldots$$

formule dont le second membre est une série convergente tant que l'on a $u<1$ ou $u=1$.

REMARQUE I. Il résulte de ce qui précède que l'on a
$$l(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots,$$
pour toute valeur de x comprise entre -1 et $+1$.

REMARQUE II. Si l'on se sert des initiales *log* pour désigner les logarithmes du système dont le module est M, on aura
$$\log(1+x)=\text{M}\left(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots\right).$$

Développement en serie de arc tang u, *où* u *est un nombre positif égal ou inférieur à* 1. Soit x une quantité variable entre les limites 0 et u; u est un nombre positif égal ou inférieur à 1. Posons

[1] $$f(x)=\text{arc tang}\,x,$$

$f(x)$ étant une fonction continue de x qui croît de 0 à $\frac{\pi}{4}$ quand x croît de 0 à 1; la fonction arc tang x est ainsi définie d'une manière précise, et n'a qu'une seule valeur pour chaque valeur de x. La dérivée $f'(x)$ de $f(x)$ est $\frac{1}{1+x^2}$, et l'on peut écrire ces deux égalités :

[2] $$\begin{cases} f'(x)=1-x^2+x^4-x^6+\ldots\pm x^{2n-2}\mp\dfrac{x^{2n}}{1+x^2}, \\ f'(x)=1-x^2+x^4-x^6+\ldots\pm x^{2n-2}\mp x^{2n}\pm\dfrac{x^{2n+2}}{1+x^2}. \end{cases}$$

Posons aussi

$$[3] \qquad \varphi(x)=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots\pm\frac{x^{2n-1}}{2n-1},$$

et désignons par $\varphi'(x)$ la dérivée du polynôme $\varphi(x)$; nous aurons

$$(4) \qquad \varphi'(x)=1-x^2+x^4-\ldots\pm x^{2n-2}.$$

En retranchant l'équation [4] de chacune des équations [2], on obtient

$$[5] \qquad f'(x)-\varphi'(x)=\mp\frac{x^{2n}}{1+x^2},$$

$$[6] \qquad f'(x)-\varphi'(x)\pm x^{2n}=\pm\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

Les seconds membres des équations [5] et [6] sont de signes contraires; par conséquent les deux fonctions $f(x)-\varphi(x)$ et $f(x)-\varphi(x)\pm\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, ayant leurs dérivées de signes contraires, sont l'une croissante, l'autre décroissante, quand x croît de 0 à u. Or, les deux fonctions dont il s'agit sont nulles pour $x=0$; donc pour $x=u$, elles sont de signes contraires. On a donc

$$f(u)-\varphi(u)\gtrless 0.$$

$$f(u)-\varphi(u)\pm\frac{u^{2n+1}}{2n+1}\lessgtr 0.$$

Dans les deux cas on peut écrire, en désignant par θ un nombre compris entre 0 et 1,

$$f(u)=\varphi(u)\mp\frac{\theta u^{2n+1}}{2n+1},$$

ou

$$[7] \qquad \text{arc tang}\, u=\frac{u}{1}-\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}-\ldots\pm\frac{u^{2n-1}}{2n-1}\mp\frac{\theta u^{2n+1}}{2n+1}.$$

La quantité u étant égale ou inférieure à 1, $\frac{\theta u^{2n+1}}{2n+1}$ tend vers zéro à mesure que n augmente indéfiniment. On a donc

$$\text{arc tang}\, u=\frac{u}{1}-\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}-\ldots,$$

formule dont le second membre est une série convergente quand u est compris entre 0 et 1.

En remarquant que arc tang $-u=-$ arc tang u, on peut

écrire la formule précédente ainsi

$$\text{arc tang}(-u) = \frac{(-u)}{1} - \frac{(-u)^3}{3} + \frac{(-u)^5}{5} - \ldots;$$

d'où il suit que la formule

$$\text{arc tang}\, x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots,$$

a lieu pour toute valeur de x comprise entre -1 et $+1$, et il résulte même de la démonstration qu'elle a lieu aussi aux limites.

Calcul du rapport de la circonférence au diamètre. En faisant $x=1$ dans la formule précédente, et remarquant que $\text{arc tang}\, x = \frac{\pi}{4}$, il vient

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots;$$

cette série est convergente; mais les termes décroissent trop lentement pour qu'elle puisse être employée au calcul du nombre π. Le procédé de Machin, rapporté par M. Lacroix dans l'introduction du *Traité des Calculs différentiel et intégral*, permet d'obtenir des séries beaucoup plus convergentes. Ce procédé, dit M. Lacroix, consiste à prendre une fraction assez petite pour la tangente d'un premier arc, et à répéter cet arc autant de fois qu'il est nécessaire pour obtenir celui de ses multiples qui approche le plus de $\frac{\pi}{4}$, puis à calculer la tangente de la différence de ces deux derniers arcs, tangente qui n'est aussi qu'une petite fraction, et dont, par conséquent, on obtient l'arc par une série très-convergente. On sent que ce moyen peut conduire à plusieurs résultats, aussi ne m'arrêterai-je que sur celui qui réunit le plus de simplicité et de convergence. En prenant $\text{tang}\, a = \frac{1}{5}$, et formant successivement

$$\text{tang}\, 2a = \frac{2\, \text{tang}\, a}{1 - \text{tang}^2 a} = \frac{5}{12}$$

$$\text{tang}\, 4a = \frac{2\, \text{tang}\, 2a}{1 - \text{tang}^2 2a} = \frac{120}{119},$$

on voit que l'arc $4a$ excède très-peu $\frac{\pi}{4}$, puisque la tangente de

l'un surpasse celle de l'autre de $\frac{1}{119}$ seulement. Faisant ensuite :

$$\frac{\pi}{4}=4a-b,$$

on trouve $\tan b=\frac{\tan 4a-1}{1+\tan 4a}=\frac{1}{239};$

d'où l'on conclut

$$\frac{\pi}{4}=4\left[\frac{1}{5}-\frac{1}{3.5^3}+\text{etc.}\right]-\left[\frac{1}{239}-\frac{1}{3.239^3}+\text{etc.}\right],$$

formule par laquelle on peut aisément calculer π avec un assez grand nombre de décimales *.

IV.

Sur les différences.

Étant donnés $(n+1)$ *nombres* $u_0, u_1, \ldots u_n$, *trouver l'expression de* $\Delta^n u_0$ *en fonction des nombres proposés.*

On a, par définition :

$\Delta u_0=u_1-u_0,\ \Delta u_1=u_2-u_1,$

$\Delta^2 u_0=\Delta u_1-\Delta u_0=u_2-u_1-(u_1-u_0)=u_2-2u_1+u_0,\ \Delta^2 u_1=u_3-2u_2+u_1,$

$\Delta^3 u_0=\Delta^2 u_1-\Delta^2 u_0=(u_3-2u_2+u_1)-(u_2-2u_1+u_0)=u_3-3u_2+3u_1-u_0,$

on aperçoit immédiatement une loi régulière de formation, et l'on est conduit à écrire la formule générale

$$\Delta^n u_0=u_n-nu_{n-1}+\frac{n.n-1}{1.2}u_{n-2}-\frac{n(n-1)n-2}{1.2.3}u_{n-3}\ldots\pm u_0$$

pour la démontrer, admettons qu'elle soit vraie pour la différence $\Delta^{n-1}u_0$, et que l'on ait

$$\Delta^{n-1}u_0=u_{n-1}-(n-1)u_{n-2}+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}u_{n-3}\ldots\pm(n-1)u_1\mp u_0,$$

on aura de même

$$\Delta^{n-1}u_1=u_n-(n-1)u_{n-1}+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}u_{n-2}\ldots\mp u_1.$$

Car, $\Delta^{n-1}u_1$ se forme évidemment avec $u_n, u_{n-1}\ldots u_1$, comme $\Delta^{n-1}u_0$ avec $u_{n-1}, u_{n-2}\ldots u_0$. En soustrayant l'une de l'autre les

* Pour plus de développements sur cette question, voyez un Mémoire d'Euler. *Mémoires de Saint-Pétersbourg*, tome XI.

deux équations précédentes, il vient

$$\Delta^{n-1}u_1 - \Delta^{n-1}u_0 = \Delta^n u_0 = u_n - nu_{n-1} + u_{n-2}\left(\frac{(n-1)(n-2)}{1.2} + n-1\right)$$
$$- u_{n-3}\left(\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\right)$$
$$+ \ldots \mp nu_1 \pm u_0,$$

or, les divers coefficients du second membre provenant de l'addition de deux coefficients consécutifs de la puissance $(n-1)$ du binôme, sont précisément les coefficients de la puissance $n^{ème}$, et l'on a, comme on voulait le démontrer,

$$\Delta^n u_0 = u_n - nu_{n-1} + \frac{n.(n-1)}{1.2} u_{n-2} \ldots \mp nu_1 \pm u_0.$$

V.

Application de la méthode d'interpolation à la représentation exacte d'une fonction entière $f(x)$ du degré m, dont on connaît les valeurs $u_0, u_1, u_2 \ldots u_m$, correspondantes aux valeurs de x_0, $x_0+h \ldots x_0+mh$ de la variable.

La formule d'interpolation démontrée (**372**), a pour but de former une fonction entière de degré m, qui, pour les valeurs x_0, $x_0+h \ldots x_0+mh$ de x, prenne les valeurs u_0, $u_1 \ldots u_m$. Or deux fonctions entières de degré m, ne peuvent être égales pour $m+1$ valeurs de la variable sans être complétement identiques, car, sans cela, en les égalant, on formerait une équation de degré m admettant $m+1$ racines; la fonction $f(x)$ est donc identique à la formule fournie par la méthode d'interpolation, et l'on a

$$[A] \quad f(x) = u_0 + \frac{(x-x_0)}{h}\Delta u_0 + \frac{\frac{(x-x_0)}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \ldots$$
$$+ \frac{\frac{(x-x_0)}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)-\left(\frac{x-x_0}{h}-m+1\right)m}{1.2\ldots m}\Delta^m u_0;$$

on conclut de cette formule que si u_0, $\Delta u_0 \ldots \Delta^m u_0$, sont positives en donnant à x une valeur telle que $\frac{x-x_0}{h}$, $\frac{x-x_0}{h}-1$ $\ldots \frac{x-x_0}{h}-m+1$ soient des quantités positives, c'est-à-dire en faisant x plus grand que $x_0+(m-1)h$, $f(x)$ sera positif. On peut même ajouter qu'à partir de la valeur $x=x_0+(m-1)h$, tous les termes qui composent le second membre de la for-

Digitized by

mule [A] augmentent avec x, et que, par conséquent, il en est de même de $f(x)$.

$x_0+(m-1)h$ est évidemment, d'après cela, *une limite supérieure des racines positives*, et les solutions de l'équation doivent être cherchées seulement parmi les nombres inférieurs à cette limite.

VI.

Résolution de l'équation du troisième degré.

Soit l'équation du troisième degré

[1] $$x^3+ax^2+bx+c=\varphi(x)=0\,;$$

posant $$x=x'+h,$$

elle deviendra

$$(x'+h)^3+a(x'+h)^2+b(x'+h)+c=\varphi(x'+h)=\varphi(h)+x'\varphi'(h)$$
$$+\frac{x'^2}{2}\varphi''(h)+\frac{x'^3}{6}\varphi'''(h),$$

posons $$\varphi''(h)=0,$$

c'est-à-dire $$6h+2a=0,$$

ou $$h=-\frac{a}{3}.$$

L'équation en x ne contiendra pas de terme en x'^2 et sera de la forme

[2] $$x'^3+px'+q=0.$$

C'est sous cette dernière forme que nous considérons l'équation du troisième degré, en supprimant l'accent de la lettre x'.

Posons $$x=y+z,$$

l'équation [2] devient

$$y^3+z^3+(p+3yz)(y+z)+q=0.$$

Comme on peut évidemment disposer arbitrairement de l'une des quantités y et z, nous ferons

[3] $$yz=-\frac{p}{3},$$

et il vient

[4] $$y^3+z^3=-q.$$

y^3 et z^3 sont, en vertu des équations [3] et [4], les racines de l'équation du second degré

$$t^2-qt-\frac{p^3}{27}=0,$$

Digitized by Google

et l'on a, par conséquent,

$$[5] \qquad \begin{cases} y^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \\ z^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}. \end{cases}$$

Ces équations [5] donnent trois valeurs pour y et trois pour z; mais, en vertu de l'équation [3], il ne faut associer que les valeurs de y et de z qui ont un produit réel.

Supposons $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ nul ou négatif, ce qui exige que p soit négatif, et posons

$$-\frac{q}{2} = \rho \cos \omega, \qquad \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -\rho^2 \sin^2 \omega,$$

on aura, pour déterminer ρ et ω,

$$\rho = \sqrt{-\frac{p^3}{27}},$$

$$\cos \omega = \frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}}$$

et les équations [5] deviennent

$$y^3 = \rho (\cos \omega + \sqrt{-1} \sin \omega)$$
$$z^3 = \rho (\cos \omega - \sqrt{-1} \sin \omega).$$

d'où
$$y = \sqrt[3]{\rho} \left(\cos \frac{2k\pi + \omega}{3} + \sqrt{-1} \sin \frac{2k\pi + \omega}{3} \right),$$
$$z = \sqrt[3]{\rho} \left(\cos \frac{2k\pi + \omega}{3} - \sqrt{-1} \sin \frac{2k\pi - \omega}{3} \right),$$

où l'on doit donner à k les trois valeurs 0, 1, 2. Il faut que k ait la même valeur dans ces deux formules pour que le produit yz soit réel, par conséquent les racines de la proposée sont données par la formule

$$x = y + z = 2 \sqrt[3]{\rho} \cos \frac{2k\pi + \omega}{3}.$$

Ces racines sont :

$$2\sqrt[3]{\rho} \cos \frac{\omega}{3}, \qquad 2\sqrt[3]{\rho} \cos \frac{2\pi + \omega}{3}, \qquad 2\sqrt[3]{\rho} \cos \frac{4\pi + \omega}{3}.$$

Ces expressions sont calculables par logarithmes.

On voit que dans ce cas $\left(\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} < 0 \right)$, les trois racines sont

réelles. Deux d'entre elles seraient égales si l'on avait $\omega = 0$, c'est-à-dire $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} = 0$.

Supposons maintenant $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ positif, et désignons par A et B les valeurs réelles de y et de z que l'on peut déduire alors des équations [5], en sorte que

$$A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

$$B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Soit α, l'une des racines cubiques imaginaires de l'unité, l'autre sera α^2, et les valeurs de y seront

$$A, \quad A\alpha, \quad A\alpha^2,$$

et celles de z $\quad B, \quad B\alpha, \quad B\alpha^2.$

Comme on doit ajouter, pour former x, celles de ces valeurs dont le produit est réel, les valeurs de x seront

$$x = A + B, \qquad x = A\alpha + B\alpha^2, \qquad x = A\alpha^2 + B\alpha.$$

Or, les racines de l'équation $x^3 = 1$ sont, outre l'unité, $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}$, $\alpha^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}$, comme on le trouve en divisant $x^3 - 1$ par $x - 1$ et résolvant l'équation du second degré ainsi obtenue; d'après cela les trois valeurs de x sont :

$$A + B \quad \text{et} \quad A + B \pm \sqrt{-1}\,\frac{A - B}{2}\sqrt{3}.$$

On voit qu'une seule de ces racines est réelle. Il nous reste à montrer comment on peut appliquer le calcul des logarithmes à leur détermination. Il convient de distinguer dans cette recherche le cas où p est positif et celui où il est négatif.

1° Soit $p < 0$, on a, par hypothèse, $-\frac{p^3}{27} < \frac{q^2}{4}$, et l'on peut poser par conséquent

$$\sqrt{\frac{-p^3}{27}} = \frac{q}{2}\sin\omega,$$

on aura alors $A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{q}{2}\cos\omega} = \sqrt[3]{-q\sin^2\frac{1}{2}\omega}$,

$$B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{q}{2}\cos\omega} = \sqrt[3]{-q\cos^2\frac{1}{2}\omega}.$$

Digitized by Google

ou, en remplaçant q par sa valeur, $\frac{2}{\sin\omega}\sqrt{\frac{-p^3}{27}}$,

$$A=\sqrt{\frac{-p}{3}}\sqrt[3]{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\omega},\qquad B=\sqrt{\frac{-p}{3}}\sqrt[3]{\cot\tfrac{1}{2}\omega}.$$

Soit maintenant φ un angle auxiliaire défini par l'équation :

$$\operatorname{tang}\varphi=\sqrt[3]{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\omega},$$

on aura $\quad A=\sqrt{\frac{-p}{3}}\operatorname{tang}\varphi \quad B=\sqrt{\frac{-p}{3}}\cot\varphi;$

et par suite, les valeurs de x sont :

$$\sqrt{\frac{-p}{3}}(\operatorname{tang}\varphi+\cot\varphi)=\sqrt{\frac{-p}{3}}\frac{2}{\sin 2\varphi},$$

et $\quad -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-p}{3}}(\operatorname{tang}\varphi+\cot\varphi)\pm\frac{1}{2}\sqrt{-1}\sqrt{-p}(\operatorname{tang}\varphi-\cot\varphi)$

$$=\frac{\sqrt{\frac{-p}{3}}}{\sin 2\varphi}\pm\sqrt{-1}\sqrt{-p}\cot 2\varphi,$$

formules calculables par logarithmes.

2° Soit $p>0$. On posera $\sqrt{\frac{p^3}{27}}=\frac{q}{2}\operatorname{tang}\omega$,

il vient alors $\quad A=\sqrt[3]{\frac{-q\sin^2\frac{1}{2}\omega}{\cos\omega}},\quad B=\sqrt[3]{\frac{-q\cos^2\frac{1}{2}\omega}{\cos\omega}},$

ou, en remplaçant q par $\frac{2\sqrt{\frac{p^3}{27}}}{\operatorname{tang}\omega}$,

$$A=\sqrt{\frac{p}{3}}\sqrt[3]{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\omega},\quad B=-\sqrt{\frac{p}{3}}\sqrt[3]{\cot\tfrac{1}{2}\omega};$$

posant, comme plus haut, $\operatorname{tang}\varphi=\sqrt[3]{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\omega}$,

il vient $\quad A=\sqrt{\frac{p}{3}}\operatorname{tang}\varphi,\quad B=-\sqrt{\frac{p}{3}}\cot\varphi,$

et les racines cherchées sont

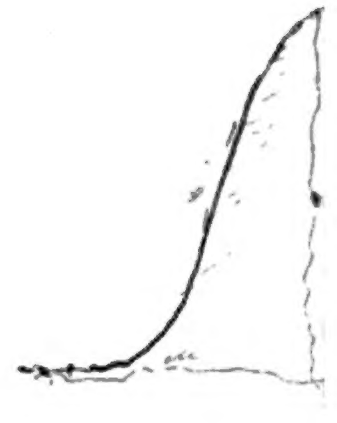
$$2\sqrt{\frac{p}{3}}\cot 2\varphi,\quad -\sqrt{\frac{p}{3}}\cot 2\varphi\pm\sqrt{-1}\frac{\sqrt{p}}{\sin 2\varphi}.$$

FIN DES ADDITIONS.

Imprimerie de Ch. Lahure (ancienne maison Crapelet)
rue de Vaugirard, 9, près de l'Odéon.

606 29

SBN



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google